24 - لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=2\sin x-x$

إذا علمت أنها متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

استنتج عدد حلول المعادلة $\sin x=\frac{x}{2}$ على المجال $[0,\pi]$ ثم على المجال $[-\pi,0]$

ثم بين أن هذه الحلول وحيدة في $\mathbb{R}$

25 - f دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}, & x\neq 0\\ f(0)=\alpha \end{cases}$

1) ما هي القيم التي يأخذها α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

26 - f دالة مستمرة على المجال $[0,1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $f(x)\in I$

g الدالة المعرفة على I بـ $g(x)=f(x)-x$

بتطبيق نظرية القيم المتوسطة على الدالة g بين أنه يوجد عدد حقيقي a من I بحيث $f(a)=a$.

الدرس 3

الاشتقاقية ودراسة الدوال

1 - تعاريف (تذكير)

D_f مجموعة تعريف الدالة f و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1 - 1 العدد المشتق و الدالة المشتقة

تعريف 1

f دالة معرفة على مجال I و a عدد منه

عندما نقول أن ℓ هو العدد المشتق للدالة f عند a نعني أن أحد الشرطين التاليين محقق.

الشرط الأول:

الدالة $h\mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لها نهاية ℓ عند 0.

الشرط الثاني:

الدالة $x\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية ℓ عند a.

و نرمز إلى العدد المشتق لـ f عند a بـ $f'(a)$

إذا قبلت الدالة f عددا مشتقا عند a نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a.

و إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد من مجال I محتوى في D_f

نقول أن f قابلة للاشتقاق على I.

تعريف 2

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المشتقة للدالة f على المجال I هي الدالة التي نرمز لها بـ f' و التي ترفق بكل x من I العدد $f'(x)$

ملاحظة

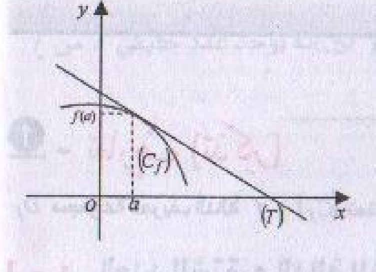
1) يمكن كتابة $f'(x)=\frac{df}{dx}$ و تسمى الكتابة التفاضلية لـ f' .
2) تعريف f' ليس مقتصرا على مجال واحد بل يمكن تعريفها على اتحاد مجالات.

مثال -

الدالة المشتقة للدالة $x \xrightarrow{f} \frac{1}{x}$ المعرفة على $D_f =]-\infty, 0[\cup]0,+\infty[$ هي الدالة f' حيث $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$.

1 - 2 المماس لمنحني عند نقطة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل a
المماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(a, f(a))$ هو المستقيم (T) المار بـ A و معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته هي: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.



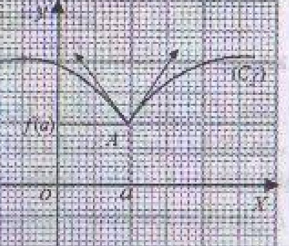
1 - 3 المشتق من اليمين و من اليسار عند عدد معين

f دالة مستمرة على مجال I يشمل a

- إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية ℓ_1 من اليمين عند a نقول ان f قابلة للاشتقاق من اليمين عند a .
- إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية ℓ_2 من اليسار عند a نقول ان الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند a .

التفسير الهندسي

التمثيل البياني للدالة f يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a, f(a))$ معامل توجيهه ℓ_1 و يقبل ايضا نصف مماس من اليسار عند A معامل توجيهه ℓ_2 .



إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a و النقطة A تسمى نقطة زاوية.

مثال -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{3x+2}{|x-1|+3}$

1) ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 1 ، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_1) .
2) ادرس قابلية اشتقاق f على يسار 1 ، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_2) .

✓ الحل

1) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يمين 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ تقبل نهاية حقيقية لما x يؤول إلى 1 بقيم أكبر.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\frac{3x+2}{x+2}-\frac{5}{3}}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{9x+6-5x-10}{3(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{4(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{4}{3(x+2)} = \frac{4}{9}$$

النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية على يمين الواحد وبالتالي f قابلة للاشتقاق من اليمين عند 1 و العدد المشتق من اليمين هو $\ell_1 = \frac{4}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يمين A هي :

$$(T_1) : y = \frac{4}{9}(x-1)+\frac{5}{3} \quad , \quad x \geq 1$$

2) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يسار 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية لما x يؤول إلى 1 من اليسار.

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{\frac{3x+2}{-x+4}-\frac{5}{3}}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{14}{3(-x+4)} = \frac{14}{9} = \ell_2$$

النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية على يسار 1 بالتالي f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 1 و العدد المشتق من اليسار هو $\ell_2 = \frac{14}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يسار A هي :

$$(T_2) : y = \frac{14}{9}(x-1)+\frac{5}{3} \quad , \quad x \leq 1$$

بما ان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1 و النقطة $A(1, \frac{5}{3})$ هي نقطة زاوية.

1 - 4 المماس العمودي لمنحن

إذا كانت f مستمرة عند a و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$
فإن المنحنى (C_f) يقبل مماس عمودي عند النقطة $A(a\ ,\ f(a))$.

• **التفسير الهندسي**

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ حيث f مستمرة عند a
تعني أن معاملات توجيه المستقيمات المارة من A و القاطعة لـ (C_f) تؤول إلى $(+\infty)$.
إذن هذه المستقيمات تؤول إلى المستقيم ذي المعادلة $x=a$.

مثال - ◆

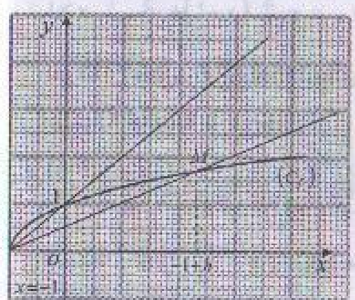
f دالة معرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x+1}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -1، ثم فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا.

✓ الحل

من اجل $h\rangle 0$ لدينا $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$

و $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1.
و بما أن النسبة تؤول إلى $(+\infty)$ لما h يؤول إلى الصفر فإن معامل توجيه المستقيم (AM) يصبح كبيرا جدا.
إذن المماس لـ (C_f) عند $A(-1,0)$ عمودي و معادلته هي $x=-1$.



1 - 5 التقريب التآلفي و طريقة أولر

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من اجل كل عدد حقيقي h مع $x+h\in I$.

لدينا $f(x+h)=f(x)+h\times f'(x)+h\,\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.
نتحصل هكذا على التقريب $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ لما h يقترب من الصفر.
نسمي $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من اجل h صغير جدا.

الإثبات

ليكن x عددا حقيقيا من I، بما أن f قابلة للاشتقاق عند x فإن

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x}=f'(x)$$

بوضع $\varepsilon(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ يكون،

ينتج مما سبق: $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=f'(x)-f'(x)=0$

$$f(x+h)-f(x)=h\times f'(x)+h\varepsilon(h)\quad\text{.........}\quad(1)$$

بوضع $\Delta x=x+h-x=h$
و $\Delta y=f(x+h)-f(x)$
العلاقة (1) تكتب:
$\Delta y=(\Delta x)f'(x)+(\Delta x)\,\varepsilon(\Delta x)$
و منه التقريب $\Delta y\approx(\Delta x)f'(x)$
هذا التقريب يقودنا إلى الكتابة الرمزية
$dy=f'(x)dx$
و تسمى هذه الأخيرة بالكتابة التفاضلية.

طريقة أولر

في كثير من المسائل يحدث و أن نعرف الدالة المشتقة f' للدالة f و قيمة لـ f عند عدد (شرط أولي $y_0=f(x_0)$) بدون معرفة العبارة الصريحة لـ f.
تسمح لنا طريقة أولر بإنشاء منحنى تقريبي للدالة f،
لذلك نعتمد على فكرة أنه من اجل h قريب من الصفر يكون $f(x+h)$ قريب من $f(x)+h\times f'(x)$.
بما أن لدينا $f(x_0)=y_0$ نستطيع أن نعلم نقطة من المنحنى البياني لـ f و هي $A_0(x_0,y_0)$.
نختار عددا حقيقيا h غير معدوم و قريب من الصفر و بما أننا نعرف $f'(x_0)$ ننشئ النقطة A_1 ذات الفاصلة $x_1=x_0+h$ التي تنتمي إلى المستقيم المار من A_0 و معامل توجيهه $f'(x_0)$ يكون ترتيبها $y_1=f(x_0)+h\times f'(x_0)$
بما أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ لما h يقترب من الصفر فإن A_1 قريبة من (C_f).

بنفس الطريقة و ابتداء من A_1 نستطيع إنشاء النقطة $A_2\left(x_1+h\ ,\ f(x_1)+h f'(x_1)\right)$
و هكذا نعلم النقط A_n التي إحداثياتها $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=f(x_{n-1})+h f'(x_{n-1})$ مع $n\geq 1$.
وتسلسل القطع $[A_0 A_1]$ ، $[A_1 A_2]$ ،.... يعطي لنا تمثيلا بيانيا مقربا لـ (C_f) و هذا التمثيل متعلق بالخطوة h و كلما كانت h صغيرة جدا كلما كان المنحنى دقيقا بالقدر الكافي.

مثال -

لتكن f دالة معرفة بـ $f(0)=0$ و $f'(x)=2x$ ، باستعمال طريقة أولر و بأخذ خطوة $p=0,5$ أنشئ جدول القيم المقربة لـ $f(x)$ من اجل كل x من $[0\,;3]$
ثم أنشئ منحنى تقريبي لـ f على هذا المجال.

✓ الحل

$f(0,5)=f(0)+0,5\times f'(0)=0$
$f(1)=f(0,5)+0,5\times f'(0,5)=0,5$
$f(1,5)=f(1)+0,5\times f'(1)=1,5$
$f(2)=f(1,5)+0,5\times f'(1,5)=3$
$f(2,5)=f(2)+0,5\times f'(2)=5$
$f(3)=f(2,5)+0,5\times f'(2,5)=7,5$

x	$f(x)$
0	0
0,5	0
1	0,5
1,5	1,5
2	3
2,5	5
3	7,5

❷ - مشتق الدوال المرجعية

2 - 1 عمليات على الاشتقاق

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على D (D مجال او إتحاد مجالات) و k عدد حقيقي
إذن الدوال kU ، $U+V$ و $U\times V$ قابلة للاشتقاق على D و لدينا:

$(kU)'=kU'$ ، $(U+V)'=U'+V'$ و $(U\times V)'=U'V+U\times V'$

و إذا كانت V غير معدومة على D فإن $\frac{U}{V}$ و $\frac{1}{V}$ قابلتان للاشتقاق على D و لدينا :

$$\left(\frac{1}{V}\right)'=\frac{-V'}{V^2} \quad \text{و} \quad \left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-V'U}{V^2}$$

ملاحظة

الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

جدول مشتقات الدوال الشهيرة.

الدالة	الدالة المشتقة	تعاليق
$x\mapsto k$ (ثابت)	$x\mapsto 0$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto x$	$x\mapsto 1$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{1}{x}$	$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x\in\mathbb{R}^*$
$x\mapsto x^n$ مع $n\in\mathbb{N}^*$	$x\mapsto n x^{n-1}$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n$ مع $n\in\mathbb{Z}^*$	$x\mapsto n x^{n-1}$	$x\in\mathbb{R}^*$
$x\mapsto \sqrt{x}$	$x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\in]0,+\infty[$
$x\mapsto \sin x$	$x\mapsto \cos x$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto \cos x$	$x\mapsto -\sin x$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$	$x\mapsto na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+a_2 x+a_1$	$x\in\mathbb{R}$

تمرين تدريبي

من أجل كل دالة من الدوال التالية عين مجموعة تعريفها و مجموعة تعريف دالتها المشتقة ثم عين دالتها المشتقة :

1) $f(x)=2x^3+5x-1$ ، 2) $g(x)=\frac{2x^2-x+1}{x^2+3x}$

3) $h(x)=\frac{1}{x^2-x+3}$ ، 4) $k(x)=x^2\sin x$

✓ الحل

1) الدالة f هي دالة كثيرة حدود معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=6x^2+5$
2) الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2+3x\neq 0$.

$x^2+3x\neq 0$ يكافئ $(x\neq 0)$ و $(x\neq -3)$ و منه $D_f=\mathbb{R}-\{0,-3\}$

و بما أن g دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على D_g و من أجل كل x من D_g لدينا :

$$g'(x)=\frac{(4x-1)(x^2+3x)-(2x+3)(2x^2-x+1)}{(x^2+3x)^2}=\frac{7x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x^2-x+3\rangle 0$ و منه مجموعة تعريف الدالة h هي $\mathbb{R}$

و بما أن الدالة h ناطقة فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $h'(x)=\frac{-(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

4) الدالتان $x\xrightarrow{V}x^2$ و $x\xrightarrow{U}\sin x$ معرفتان و قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و بالتالي الدالة $K=U\times V$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $K'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$.

3 - تطبيقات الاشتقاق

3 - 1 اتجاه التغير

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I محتوى في D_f .

- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x)\rangle 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x)\langle 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

ملاحظة

إذا انعدمت f' عند بعض القيم من المجال I و لا تغير إشارتها على I فإن الدالة f تحافظ على تغيراتها.

مثال -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^3$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=3x^2$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا $f'(x)\rangle 0$ و $f'(0)=0$.

إذن الدالة f' موجبة على $\mathbb{R}$ و تنعدم عند 0 وبالتالي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3 - 2 القيم الحدية لدالة

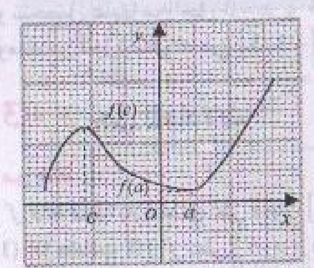
f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل c.

القول أن $f(c)$ قيمة حدية عظمى (صغرى) يعني أنه نستطيع إيجاد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل c بحيث من أجل كل x من J لدينا $f(x)\leq f(c)$ ، $(f(x)\geq f(c))$.

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل c .

إذا انعدمت $f'(x)$ عند c مغيرة إشارتها في جوار c فإن $f(c)$ هي قيمة حدية و المماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(c,f(c))$ يكون أفقيا.



تمرين تدريبي 1

ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[-2,3]$ بالشكل $f(x)=x^3-3x^2+2$
و استنتج القيم الحدية لـ f على هذا المجال ثم اعط حصرا لـ $f(x)$ على المجال السابق.

الحل ✓

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[-2,3]$ و من أجل كل x من $[-2,3]$ لدينا $f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $(x=2)$

إشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول المجاور

- إذا كان $x\in]0,2[$ فإن $f'(x)\langle 0$

و منه الدالة f متناقصة تماما على $[0,2]$

- إذا كان $x\in]-2,0[$ أو $x\in]2,3[$ فإن $f'(x)\rangle 0$

و منه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-2,0]$ و $[2,3]$

و إليك جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		0		2		3
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات الدالة f	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

$f(-2)=18$ ، $f(0)=2$ ، $f(2)=-2$ ، $f(3)=2$

$f(0)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[-2,2]$

$f(3)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[0,3]$

$f(-2)=-18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2,2]$

$f(2)=-2$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0,3]$

$-18 = f(-2)$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2,3]$

العدد 2 هو قيمة حدية عظمى للدالة f على مجال $[-2,3]$

و نتحصل عليها من اجل $x=0$ و $x=3$

ومنه من اجل كل x من $[-2,3]$ يكون $-18 \le f(x) \le 2$.

3 - 3 حل المعادلات

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I=[a,b]$

1) إذا كانت $f' > 0$ على $[a,b]$ فإن من اجل كل k من $[f(a),f(b)]$، المعادلة $f(x)=k$ لها حل وحيد في المجال I.

2) إذا كانت $f' < 0$ على $[a,b]$ فإن من اجل كل k من $[f(b),f(a)]$، المعادلة $f(x)=k$ لها حل وحيد في المجال I.

ملاحظة

نتائج المبرهنة تبقى صحيحة حتى و لو انعدمت f' عند بعض القيم من I.

تمرن تدريبي 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^3-3x+1$.

1) عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2) ادرس تغيرات الدالة f.

3) بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول ثم اعط حصرا بتقريب 10^{-3} للحل الذي ينتمي إلى $]-2,-1[$.

الحل

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=-1)$.

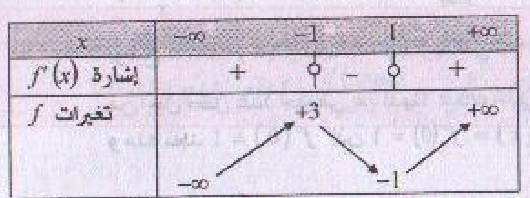
- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $f'(x)<0$

و منه f متناقصة تماما على $[-1,1]$

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$

و منه f متزايدة تماما على كل من المجالين $[1,+\infty[$ ، $]-\infty,-1]$

و اليك جدول تغيرات الدالة f :



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$+3$	↘	-1	↗	$+\infty$

• بما ان f متزايدة تماما على $]-\infty,-1]$ و صورة هذا المجال هي $]-\infty,3]$ و الصفر ينتمي الى $]-\infty,3]$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

و كون $f(-2)=-1$ يكون $\alpha\in]-2,-1[$.

لتعيين حصر لـ α بتقريب 10^{-3} نتبع طريقة ديكتومي.

$m=\frac{a+b}{2}=-1,5$ و $f(m)=0,125$ إذن $\alpha\in]-2,-1,5[$

$m'=\frac{-2-1,5}{2}=-1,75$ و $f(m')=0,89$ إذن $\alpha\in]-2,-1,75[$

$m''=-1,875$ و $f(m'')=0,033$ إذن $\alpha\in]-2,-1,87[$

$m'''=-1,9375$ و $f(m''')=-0,46$ إذن $\alpha\in]-1,937;-1,87[$

• بما ان f متناقصة تماما على $[-1,1]$ و صورة هذا المجال هي $[-1,3]$ و الصفر ينتمي إلى $[-1,3]$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β

بنفس الطريقة نبين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1,+\infty[$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول.

3 - 4 استعمال العدد المشتق في حساب بعض النهايات

نستطيع استعمال العدد المشتق لتعيين بعض النهايات.

إذا كانت لدينا عبارة من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع f دالة قابلة للاشتقاق عند a

فإن $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

مثال -

1) $g(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ، نريد حساب $\lim_{x\to0} g(x)$.

بوضع $f(x)=\cos x$ نجد $f(0)=1$ بالتالي $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

لكن f قابلة للاشتقاق عند الصفر إذن $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=-\sin x$

ومنه نجد $f'(0)=0$ إذن $\lim_{x\to0} g(x)=f'(0)=0$

2) $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ نريد حساب $\lim_{x\to 0} h(x)$.

بوضع $f(x)=\sin x$ نجد $f(0)=0$ بالتالي $h(x)$ تكتب $h(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=\cos x$

و منه نجد $f'(0)=1$ إذن $\lim_{x\to 0} h(x)=f'(0)=1$.

4 ـ مشتق دالة مركبة

4 - 1 نظرية أساسية

مبرهنة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على مجال J وكانت U دالة قابلة للاشتقاق على I
و من اجل كل x من I لدينا $U(x)\in J$.
فإن الدالة المعرفة بـ $f(x)=g(U(x))$ قابلة للاشتقاق على I
و من اجل كل x من I لدينا $f'(x)=U'(x)g'(U(x))$

الإثبات

لكي نبرهن على ان f قابلة للاشتقاق على I

يجب ان نبرهن ان الدالة h المعرفة بـ $h(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

لها نهاية عند a هي $U'(a)g'(U(a))$ حيث a كيفي من I

ـ نفرض انه من اجل كل x بجوار a و يختلف عنه $U(x)\neq U(a)$
و عليه من أجل كل x من هذا الجوار يمكن كتابة

$$h(x)=\frac{g(U(x))-g(U(a))}{U(x)-U(a)}\times\frac{U(x)-U(a)}{x-a}$$

لكن U قابلة للاشتقاق عند a إذن $\lim_{x\to a}\frac{U(x)-U(a)}{x-a}=U'(a)$.

بوضع $t(x)=\frac{g(U(x))-g(U(a))}{U(x)-U(a)}$ و $U(x)=X$ يكون $t(x)=\frac{g(X)-g(U(a))}{X-U(a)}$

لكن U قابلة للاشتقاق عند a

إذن $X=U(x)=U(a)+(x-a)U'(a)+(x-a)\varepsilon(x)$ مع $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$

إذن $\lim_{x\to a} X=U(a)$ و $\lim_{x\to a}\frac{g(X)-g(U(a))}{X-U(a)}=g'(U(a))$

لأن g قابلة للاشتقاق عند $U(a)$.

إذن $\lim_{x\to a} h(x)=g'(U(a))\times U'(a)$ و منه $\lim_{x\to a} f(x)=U'(a)g'(U(a))$.

ملاحظة

1) المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذ كان I و J عبارة عن إتحاد مجالات

2) نستطيع كتابة $(g(U(x)))'=\frac{d(gou)}{dx}=\frac{dg}{dU}\times\frac{dU}{dx}$

تمرين تدريبي 1

- عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$f_3(x)=\cos\frac{1}{x}$ ، $f_2(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، $f_1(x)=(x^2+1)^3$

✓ الحل

f_1 ، f_2 ، f_3 هي دوال مركبة من الشكل gou و في كل حالة لابد من معرفة g و U

- نضع $f_1=g_1\circ u_1$ حيث $g_1(x)=x^3$ و $u_1(x)=x^2+1$

الدالتان u_1 و g_1 قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن حسب المبرهنة السابقة الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ($I=J=\mathbb{R}$).

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u'_1(x)=2x$ و $g'_1(x)=3x^2$

إذن $f'_1(x)=2x(3)(x^2+1)^2=6x(x^2+1)^2$

- نضع $f_2=g_2\circ u_2$ حيث $u_2(x)=x^2+1$ و $g_2(x)=\sqrt{x}$ و $J=]0,+\infty[$ ، $I=\mathbb{R}$.
الدالة u_2 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.والدالة g_2 قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل x من I فإن $U(x)\in J$.

من اجل كل x من J لدينا $g'_2(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

و من اجل كل x من I لدينا $u'_2(x)=2x$

إذن $f'_2(x)=2x\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

- نضع $f_3=g_3\circ u_3$ حيث $u_3(x)=\frac{1}{x}$ و $g_3(x)=\cos x$ و $I=\mathbb{R}^*$ ، $J=\mathbb{R}$
و من اجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $U(x)\in J$.

الدالة u_3 قابلة للاشتقاق على I و لدينا $u'_3(x)=-\frac{1}{x^2}$.

الدالة g_3 قابلة للاشتقاق على J و لدينا $g'_3(x)=-\sin x$.

إذن $f'_3(x)=u'_3(x)\,g'_3(u_3(x))=\frac{1}{x^2}\times\sin(\frac{1}{x})$

4 - 2 مشتق الدالة العكسية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما و قابلة للاشتقاق على I و كانت $f'(x)$ لا تنعدم على I فإن الدالة العكسية g للدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)=J$ و لدينا $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ مع $y=f(x)$.

الإثبات

من اجل كل x من I لدينا $(g o f)(x)=x$

و منه من اجل كل x من I يكون $(g o f(x))'(x)=1$

و لكون $(g o f)'(x)=f'(x)g'(f(x))$ ينتج $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$.

بما أن $y=f(x)$ فإن $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ من اجل كل y من J.

نرمز إلى الدالة العكسية للدالة f بالرمز f^{-1}.

تمرين تدريبي 1

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=3x^2+6x$

1) أثبت أن f تقابل من المجال $]-\infty,-1[$ في المجال $]-3,+\infty[$

2) احسب بطريقتين مختلفتين $(f^{-1})'(0)$

✓ الحل

1) الدالة f مستمرة على مجال $]-\infty,-1[$ لأنها دالة كثيرة حدود.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود و لدينا $f'(x)=6x+6$

من اجل كل x من $]-\infty,-1[$ لدينا $f'(x)<0$

و منه f متناقصة تماما على $]-\infty,-1[$

بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty,-1[$

فهي تقابل من $]-\infty,-1[$ في $]-3,+\infty[=f(]-\infty,-1[)$ و بالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1}

2) حساب $(f^{-1})'(0)$ باستعمال التعريف

من اجل كل y من $]-3,+\infty[$ لدينا $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ حيث $y=f(x)$.

$y=0$ معناه أن $3x^2+6x=0$ و منه نجد $x=0$ أو $x=-2$

$x=0$ مرفوض لأن $0\notin]-1,+\infty[$ و بالتالي قيمة x المقبولة هي -2.

إذن $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{-6}$

- حساب $(f^{-1})'(0)$ بتعيين عبارة f^{-1}

من اجل كل x من I و من اجل كل y من $f(I)$:

$y=f(x)$ يكافئ $3x^2+6x-y=0$

$3x^2+6x-y=0$ ... (I)

ليكن Δ مميز للمعادلة (I) ذات المجهول x.

$\Delta=6^2-4(3)(-y)=36+12y$

بما أن $y>-3$ فإن $\Delta>0$ وبالتالي المعادلة (I) لها حلان مختلفان x_1 و x_2

حيث $x_1=\frac{-6+\sqrt{12y+36}}{6}$ ، $x_2=\frac{-6-\sqrt{12y+36}}{6}$.

من اجل كل $y\geq0$ يكون $x_1>0$ و بالتالي x_1 لا ينتمي إلى $]-\infty,-1[$ و عليه x_2 مقبول

إذن $x_2=f^{-1}(y)=\frac{-6-\sqrt{12y+36}}{6}$.

الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و لدينا $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{9+3x}}$

إذن $(f^{-1})'(0)=\frac{-1}{2\sqrt{9}}=\frac{-1}{6}$

4 - 3 مشتق الدالة الجذرية $\sqrt{u}$ و الدالة u^n مع $n\in\mathbb{Z}^*$

مبرهنة 1

u دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I.

إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجال I

و من اجل كل x من I لدينا $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

الإثبات

بوضع $g(x)=\sqrt{x}$ يمكن كتابة f على الشكل gou و بتطبيق قاعدة مشتق الدالة المركبة نجد $(gou)'(x)=u'(x)g'(u(x))=u'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$

ملاحظة

لمعرفة إن كانت الدالة $f=\sqrt{u}$ قابلة للاشتقاق عند x_0 حيث $u(x_0)=0$ ندرس نهاية النسبة $t(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما x يؤول إلى x_0.

مثال -

1) f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{x-2}$ ، $D_f=[2,+\infty[$

يمكن كتابة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $U(x)=x-2$

الدالة u موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ بالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ و يبقى لنا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$

لذلك ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ لما x يؤول إلى 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=+\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 . وبالتالي f قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$

2) f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{(x+1)^4}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

الدالة f تكتب على الشكل $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $u(x)=(x+1)^4$ و $u(-1)=0$

الدالة u موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و بالتالي f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ لكن $f(x)=(x+1)^2$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

مبرهنة 2

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و n عدد صحيح غير معدوم.

إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x)=(u(x))^n$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا $f'(x)=n\times u'(x)\times(u(x))^{n-1}$.

الإثبات

- حالة $n\in\mathbb{N}$:

بوضع $g(x)=x^n$ يمكن كتابة f على الشكل gou

من أجل كل x من I لدينا $g'(x)=nx^{n-1}$ و ومنه $g'(u(x))=nu^{n-1}(x)$.

إذن من أجل كل x من I لدينا $f'(x)=n(u(x))^{n-1}\times u'(x)$.

- حالة n عدد صحيح سالب و $u(x)$ غير معدوم على I

$$f(x)=(u(x))^n=\frac{1}{(u(x))^{-n}}$$

بما أن $-n>0$ فإن حسب الحالة الأولى:

$[(u(x))^{-n}]'=(-n)u'(x)(u(x))^{-n-1}$ و بتطبيق قاعدة مشتق القسمة نجد:

$f'(x)=\frac{n\,u'(x)(u(x))^{-n-1}}{(u(x))^{-2n}}$ بالتبسيط نجد:

$f'(x)=n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)$.

مبرهنة 3

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

إذن الدالتان $\cos u$ و $\sin u$ قابلتان للاشتقاق على I

و لدينا $(\cos u)'=-u'\sin u$ و $(\sin u)'=u'\cos u$

الإثبات

الدالة $\cos u$ من الشكل vou حيث $v(x)=\cos x$ ، v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $v'(x)=-\sin x$ منه $(\cos u(x))'=-\sin u(x)\times u'(x)$

بنفس الكيفية نثبت العلاقة الثانية

مثال -

$$(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$$

و $$(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$$

تمرين تدريبي

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f

أ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ، ب) $f(x)=(2x^2+x)^4$

جـ) $f(x)=\sin^2 x$ ، د) $f(x)=\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

الحل

أ) يمكن كتابة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $u(x)=x^2+x+1$

الدالة f معرفة إذا كان $u(x)\ge 0$

لكن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x)\ge 0$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

ب) يمكن كتابة $f(x)=(u(x))^4$ حيث $u(x)=2x^2+2$

الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=4(4x+1)(2x^2+x)^3$

ج) يمكن كتابة $f(x) = (u(x))^2$ مع $u(x) = \sin x$

الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = 2(\cos x)(\sin x)$.

د) يمكن كتابة $f(x) = \frac{1}{(u(x))^2}$ مع $u(x) = x^2+x+1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x) > 0$

الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = -2(2x+1)(x^2+x+1)^{-3}$

4 - 4 المشتقات المتتابعة لدالة

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I . فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة f

و إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $(f'(x))'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بـ f'' أو $f^{(2)}$

و هكذا إذا قبلت الدالة f الاشتقاق n مرة

حيث $n \geq 2$ على المجال I فإن الدالة المشتقة النونية للدالة f نرمز لها بـ $f^{(n)}$ و نكتب :

من أجل كل $n \geq 2$ ومن أجل كل x من I لدينا $f^{(1)}(x) = f'(x)$ و $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

ملاحظة

في الحركيات لما $f(t)$ تمثل المسافة المقطوعة من طرف متحرك على خط مستقيم من اللحظة الابتدائية حتى اللحظة t فإن العددين $f'(t)$ ، $f''(t)$ يمثلان على التوالي السرعة اللحظية و التسارع اللحظي للمتحرك في اللحظة t حيث :

$f'(t) = \frac{df}{dt}$ و $f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}$

مثال -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x^4$

الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة

و انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$f^{(1)}(x) = 4x^3$ ، $f^{(2)}(x) = 12x^2$ ، $f^{(3)}(x) = 24x$ ، $f^{(4)}(x) = 24$

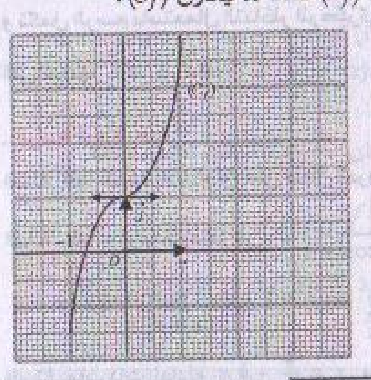
و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ لدينا $f^{(n)}(x) = 0$

4 - 5 نقطة الانعطاف

إذا كانت f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I

وكانت $f''(x)$ تنعدم عند x_0 من I مغيرة إشارتها في جوار x_0 فإن المنحني البياني (C_f) للدالة f له نقطة انعطاف $A(x_0, f(x_0))$ والمماس لـ (C_f) عند A يخترق (C_f) .

مثال -



f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = 3x^3 + 1$.

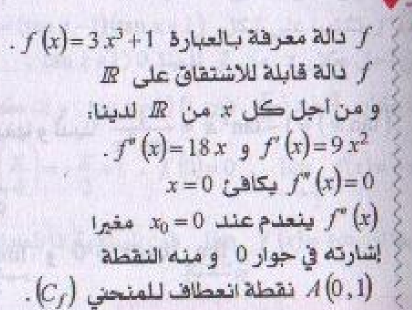
f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f'(x) = 9x^2$ و $f''(x) = 18x$.

$f''(x) = 0$ يكافئ $x = 0$

$f''(x)$ ينعدم عند $x_0 = 0$ مغيرا إشارته في جوار 0 و منه النقطة $A(0,1)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .



5 - دالة الظل tan

دالة الظل التي نرمز لها بـ tan معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع k عدد صحيح واليك بعض قيم tan من اجل قيم شهيرة لـ x .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

خواص :

1) من اجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ لدينا، $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ نقول عندئذ أن الدالة tan دورية و دورها π .

2) من اجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ لدينا $\tan(-x) = -\tan x$ نقول عندئذ أن الدالة tan فردية



- التمثيل البياني للدالة tan

النقطتان ذاتا الإحداثيات $(x,\tan x)$ و $(-x,\tan(-x))$ تنتميان إلى (γ) منحنى الدالة tan و متناظرتان بالنسبة إلى المبدأ O

إذن (γ) يقبل O كمركز تناظر له و لإنشاء المنحنى (γ) نرسمه أولا في مجال $[0\,,\,\frac{\pi}{2}[$

و نكمل الرسم باستعمال التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O و بالإنسحابات المتوالية التي أشعتها $\pi\vec{i}$ و $-\pi\vec{i}$

- دراسة الدالة tan

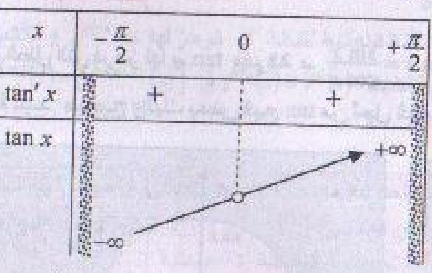
الدالة tan قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و لدينا $(\tan x)'=1-\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

الدالة tan متزايدة تماما لأن $\frac{1}{\cos^2 x}>0$

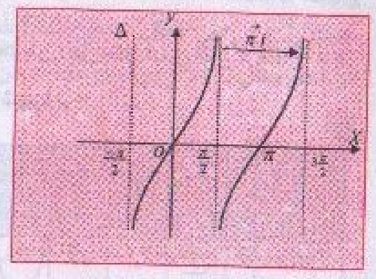
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ لأن $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x=\overset{+}{0}$

المستقيمات ذات المعادلة $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ مقاربة عمودية لـ (γ).

و إليك جدول تغيرات tan على $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ و منحناها البياني:



x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$		$+$		$+$	
$\tan x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



خاصية :

1) من اجل كل عدد حقيقي a المعادلة $\tan x=a$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

2) إذا كان α حلا للمعادلة $\tan x=a$ فإن كل الحلول الأخرى من الشكل $\alpha+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين تدريبي

أ) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $I=[0,\frac{\pi}{2}[$ بالعبارة $f(x)=\tan x-2x$

ب) برهن أن لـ (C_f) له مستقيما مقاربا عموديا ثم ارسم (C_f)

✓ الحل

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,\frac{\pi}{2}[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I هما : $x\mapsto \tan x$ ، $x\mapsto -2x$

و من اجل كل x من I لدينا $f'(x)=-1+\tan^2 x$

$f'(x)$ تكتب على شكل $f'(x)=(\tan x-1)(\tan x+1)$.

من اجل كل x من I لدينا $\tan x+1>0$

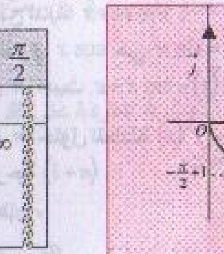
إذا كان $\frac{\pi}{2}>x>\frac{\pi}{4}$ فإن $\tan x-1>0$ و إذا كان $0<x<\frac{\pi}{4}$ فإن $\tan x-1<0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}+1$ ، $f(0)=0$ ، $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$

ب) بما أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي لـ (C_f)



x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-\pi}{2}+1$	↗	$+\infty$



6 - المعادلات التفاضلية

6 - 1 تعريف

نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة و مشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق n مرة على I حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و التي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق إلى المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$ مع f دالة مألوفة.

6 - 2 المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

نضع $y'=f(x)$ ... (1)

إذا كانت g حلا للمعادلة (1) فإن $g'(x)=f(x)$

إذا كان h حلا آخر للمعادلة (1) فإن $h'(x)=f(x)$

و منه نستنتج $g'(x)=h'(x)$ اي $h(x)=g(x)+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)=x^2$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y'=x^2$
الدالة g التي مشتقتها يساوي x^2 هي $\frac{1}{3}x^3$
و منه المعادلة $y'=x^2$. حلولها من الشكل $h(x)=\frac{1}{3}x^3+c$.

- في حالة $f(x)=\sqrt{x}$ المعادلة (1) تصبح $y'=\sqrt{x}$.
الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي مشتقتها يساوي $\sqrt{x}$ هي $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
و بالتالي حلول المعادلة $y'=\sqrt{x}$ هي $h(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)=\sin x$ المعادلة (1) تصبح $y'=\sin x$.
الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي مشتقتها تساوي $\sin x$ هي $g(x)=-\cos x$
و منه حلول المعادلة $y'=\sin x$ هي $h(x)=-\cos x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)=\cos x$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y'=\cos x$.
الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي مشتقتها تساوي $\cos x$ هي $g(x)=\sin x$
و منه حلول المعادلة $y'=\cos x$ هي الدوال h حيث $h(x)=\sin x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)$ كثير حدود من الدرجة n. حلول المعادلة $y'=f(x)$ هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $g(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n+1)$.
إذا كان $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ فإن:

$$g(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\dots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+c$$

لأن من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f(x)$
و منه الدوال g هي حلول المعادلة $y'=f(x)$.

مثال:

1) $y'=x^2+x+1$ .... (1)
حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+c$ و $c\in\mathbb{R}$.

6 - 3 المعادلة التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$.

لحل المعادلة $y''=f(x)$ نتبع ما يلي:
نبحث عن حلول المعادلة $K'=f(x)$ ثم نبحث عن حلول المعادلة $y'=K(x)$ لأن:
$y''=(y')'=(K(x))'=f(x)$.

□ حالة $f(x)=\cos x$
حلول المعادلة $K'=f(x)$ هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\sin x+c$
حلول المعادلة $y'=\sin x+c$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=-\cos x+cx+d$
حيث c و d عددان حقيقيان كيفيان.
إذن الدوال h هي حلول المعادلة $y''=\cos x$.

□ حالة $f(x)=\sin x$
بنفس الكيفية السابقة نجد حلول هذه المعادلة التي هي الدوال من الشكل:
$h(x)=-\sin x+cx+d$.

□ حالة $f(x)=\sqrt{x}$
حلول المعادلة $K'=\sqrt{x}$ هي الدوال g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.
حلول المعادلة $y'=K$ هي الدوال h المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{4}{15}x^2\sqrt{x}+cx+d$
إذن الدوال h هي حلول المعادلة التفاضلية $y''=\sqrt{x}$.

□ حالة $f(x)=x^2$
حلول المعادلة $y''=x^2$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\frac{1}{12}x^4+cx+d$
حيث c و d عددان حقيقيان.

تمرين تدريبي

عين الحل الخاص للمعادلة $y''=x^2$ الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(1)=2$

✓ **الحل**

حلول المعادلة التفاضلية $y''=x^2$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$h(x)=\frac{1}{12}x^4+cx+d$.
من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $h'(x)=\frac{1}{3}x^3+c$
$y(0)=1$ يكافئ $d=1$
$y'(1)=2$ يكافئ $\frac{1}{3}+c=2$ يكافئ $c=\frac{5}{3}$.
إذن الحل الخاص المطلوب هو $h(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{5}{3}x+1$.

7 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y'=y$

مثال -

نعتبر المعادلة $y'=y$ و نضيف الشرط الابتدائي $y(0)=1$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f(0)=1$
و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=f(x)$.
نستعمل طريقة أولر من اجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[0,1]$ بخطوة $h=\frac{1}{n}$
حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
نعرف المتتالية (x_n) بـ $x_p=x_{p-1}+h$ و $x_0=0$ و $x_n=1$.
و نحسب القيم المقربة y_1 ، y_2 ، .... y_n للأعداد $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ...... $f(x_n)$
بواسطة التقريب التآلفي للدالة f.
بما أن $f(0)=1$ فإننا نضع $y_0=1$.

1) احسب y_1
2) أ. اوجد علاقة تربط بين y_{k+1} و y_k ثم استنتج عبارة y_k بدلالة k.
ب. نفرض أن $n=10$ احسب قيم y_k حيث $1\le k\le n$.
جـ. أنشئ المنحنى التقريبي لحل المعادلة $y'=y$ على المجال $[0,1]$.

✓ الحل

1) لدينا $f(x_0+h)\approx f(x_0)+h\times f'(x_0)$
و بما أن $f'(x)=f(x)$ من اجل كل x من $[0,1]$ فإن:
$f(x_0+h)\approx f(x_0)(1+h)$ إذن $y_1=f(x_0)(1+h)=1+h=1+\frac{1}{n}$.

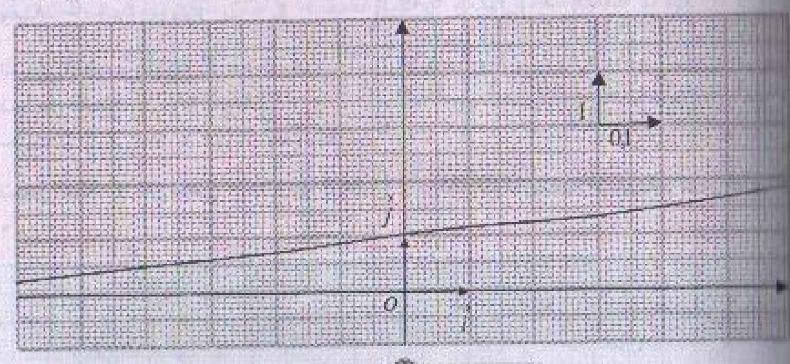
2) أ. $f(x_k+h)\approx f(x_k)+hf'(x_k)$
و بما أن $f'(x_k)=f(x_k)$ فإن $f(x_k+h)\approx(1+h)\times f(x_k)\approx(1+h)y_k$
إذن $y_{k+1}=(1+h)y_k$ .... (*)
من المساواة (*) نستنتج أن (y_k) متتالية هندسية أساسها $(1+h)$
و عليه نكتب $y_k=y_0(1+h)^k$ أي $y_k=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$.

ب. بما أن $n=10$
فإن $y_k=\left(1+\frac{1}{10}\right)^k=(1,1)^k$

جـ. المنحنى التقريبي للدالة f مشكل من القطع $[M_k\ M_{k+1}]$ حيث:
$0\le k\le n-1$ و $M_k(x_k,y_k)$

k	y_k	k	y_k
0	1	6	1,77
1	1,10	7	1,94
2	1,21	8	2,14
3	1,33	9	2,35
4	1,46	10	2,59
5	1,61		

نلاحظ انه كلما صغرت الخطوة h كلما كانت القيم y_1 ، ...... y_n قريبة من ، $f(x_1)$ .... $f(x_k)$ على التوالي.
الدالة التي تحقق $y'=y$ و $y(0)=1$ تسمى الدالة الأسية و التي نرمز بـ exp.



8 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y'=\frac{1}{x}$

مثال -

نعتبر المعادلة $y'=\frac{1}{x}$ و نضيف الشرط الابتدائي $y(1)=0$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ بحيث $f(1)=0$
و من اجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}$.
نستعمل طريقة أولر من اجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[1,2]$ بخطوة $h=0,1$
نعرف المتتالية (x_p) بـ $x_p=x_{p-1}+0,1$ مع $x_0=1$ و $1\le p\le 10$
و لتكن y_0 ، y_1 ، ... ، y_{10} القيم المقربة للأعداد $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ، .... $f(x_{10})$ على التوالي مع $y_0=0$

1) احسب y_1
2) بين أن $y_{p+1}=y_p+\frac{h}{x_p}$ ثم اعط جدولا تبين فيه قيم y_p ، x_p ثم ارسم المنحنى التقريبي لـ f

✓ **الحل**

1) $f(x_0+h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$ لكن $f'(x_0) = f(x_0)$ و منه ينتج ،

$f(x_0+h) \approx f(x_0) + \dfrac{h}{x_0}$ اذن 0,1 $= \dfrac{h}{x_0} = y_1 = y_0 + \dfrac{h}{x_0}$

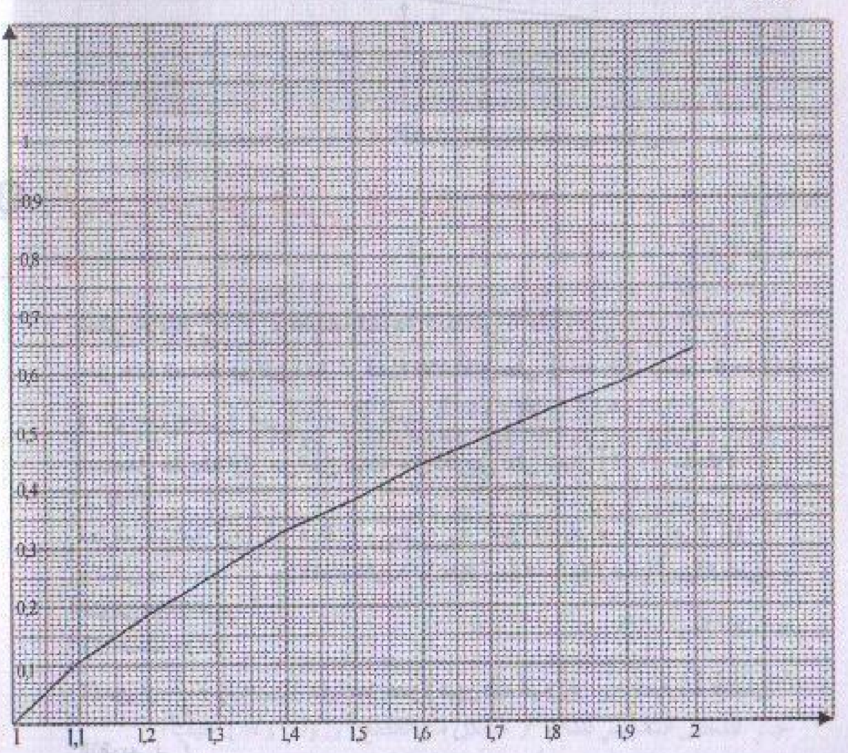
2) $f(x_p+h) \approx f(x_p) + \dfrac{h}{x_p} \approx y_p + \dfrac{h}{x_p}$.

ومنه $y_{p+1} = y_p + \dfrac{h}{x_p}$

p	x_p	y_p	p	x_p	y_p
0	1	0	6	1,6	0,44
1	1,1	0,10	7	1,7	0,49
2	1,2	0,18	8	1,8	0,54
3	1,3	0,25	9	1,9	0,59
4	1,4	0,32	10	2	0,64
5	1,5	0,38			

المنحني التقريبي للدالة f مشكل من تسلسل القطع $[M_k , M_{K+1}]$ حيث $0 \le k \le 9$ و $M_k(x_k , y_k)$.

تسمى الدالة f التي تحقق $y' = \dfrac{1}{x}$ و $f(1) = 0$ بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية و نرمز لها ب "Ln".



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 دراسة قابلية الاشتقاق

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ عند $a=0$ ، ب) $f(x) = x|x|$ عند $a=0$

جـ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ عند $a=0$ ، د) $f(x) = \dfrac{x^2-|x|}{x^2+2}$ عند $a=0$

هـ) $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} , x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ عند $a=0$

✓ **الحل**

f تقبل الاشتقاق عند عدد a يعني أن النسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية حقيقية عند a

أ) من اجل كل x من D_f و $x \neq 0$ لدينا $x\sqrt{x} = \dfrac{x^2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{x} = 0$.

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر

ب) بما ان عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس الاشتقاق من اليمين و من اليسار عند الصفر

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to} -x = 0 = \ell_1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-0}{x} = \lim\limits_{x \to} x = 0 = \ell_2$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

بما ان $\ell_1 = \ell_2$ فإن f قابلة للاشتقاق عند $a=0$.

جـ) من اجل كل x من $D_f = [0,1[$ يمكن كتابة $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = 0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

د) مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من اليمين و من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2+x}{(x^2+2)x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = \ell_1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2-x}{(x^2+2)x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x-1}{x^2+2} = \frac{-1}{2} = \ell_2$$

بما أن $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

هـ)
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\sin X}{X} = 0$$

مع $X = \frac{1}{x}$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

تطبيق 2 تعيين الدالة المشتقة

عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 4$ ، $I = \mathbb{R}$

ب) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ ، $I = \mathbb{R}$

جـ) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$ على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

د) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ، $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

✓ الحل

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 6x - 6$.

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة ناطقة و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x + 1)(x^2+1) - 2x(x^3 - 3x^2 + x - 1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 12x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x^2+1)^2}$$

جـ) الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x - 1$ قابلتان للاشتقاق على I و لدينا :

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x - 1) - (\cos x)\cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$= \frac{-1 + \sin x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{1}{\sin x - 1}$$

هـ) الدالة $x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$

تطبيق 3 تعيين معادلة المماس

اكتب معادلة المماس لـ (C_f) منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة المعطاة في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ ، $a = 0$ ، ب) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ، $a = 1$

جـ) $f(x) = x\cos x$ ، $a = \frac{\pi}{4}$ ، د) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ ، $a = 2$

✓ الحل

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن منحناها (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a معادلته $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ و منه $f'(0) = -2$

إذن (C_f) يقبل مماس (d) عند $A(0,0)$ معادلته $y = -2x$.

ب) الدالتان $x \xrightarrow{u} \sqrt{x}$ و $x \xrightarrow{v} x^2$ قابلتان للاشتقاق على $]0, +\infty[$

و بالتالي الدالة $f = u \times v$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$

إذن $f'(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(C_f) يقبل مماس (d) عند النقطة $A(1,1)$ معادلته $y = \frac{5}{2}(x-1) + 1$

جـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x \mapsto \cos x$ ، $x \mapsto x$ و حسب قاعدة مشتق الجداء نجد $f'(x) = \cos x - x\sin x$

و منه $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

منه (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$ معادلته

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\frac{\sqrt{2}}{8}$$

د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما: $x \mapsto x$ و $x \mapsto x^2+2$ و منه $f'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$ و بالتالي $f'(2) = \frac{-1}{18}$

ومنه معادلة المماس للمنحني (C_f) عند $A\left(2\ ,\ \frac{1}{3}\right)$ هي $y = \frac{-1}{18}(x-2) + \frac{1}{3}$

تطبيق 4 المماس المشترك لمنحنيين

1) f و g دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ بـ $f(x) = 3x^2-2x+1$ و $g(x) = \frac{8}{x}+1$ بين أن التحنيين المثلين لـ f و g يقبلان مماسين متوازين عند النقطة ذات الفاصلة -1.

2) h و K دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = x^3+2$ و $K(x) = \cos x + 1$ بين أن المنحنيين المثلين لـ h و K يقبلان نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

الحل

1) الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$
و من أجل كل x من $]-\infty,0[$ لدينا $f'(x) = 6x-2$ و $g'(x) = \frac{-8}{x^2}$
المنحنيان (C_f) و (C_g) لهما مماسان متوازيان عند النقطة ذات الفاصلة -1 يعني أن: $g'(-1) = f'(-1)$.
بما أن $f'(-1) = -8$ و $g'(-1) = -8$ فإن (C_f) و (C_g) لهما مماسان متوازيان ميلهما -8 عند النقطة ذات الفاصلة -1.

2) الدالتان h و K قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $h'(x) = 3x^2$ و $K'(x) = -\sin x$
و منه ينتج $h'(0)=0$ و $K'(0)=0$ و $h(0)=2$ و $K(0)=2$
إذن (C_h) و (C_K) لهما نفس المماس (d) معادلته $(d): y=2$

تطبيق 5 تعيين مماس موازي لمستقيم معلوم

(C_f) المنحنى البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x}{x^2+2} - 1$

1) اعط معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

2) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

3) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y=-2x$.

الحل

1) معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = f'(1)(x-1)+f(1)$.
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$
$f'(1) = \frac{1}{9}$ و $f(1) = -\frac{2}{3}$ ومنه معادلة المماس هي $y = \frac{1}{9}x - \frac{7}{9}$.

2) ميل المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $f'(x_0)$.
المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=-\frac{1}{4}x$
يعني $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$.
$f'(x_0) = -\frac{1}{4}$ يكافئ $\frac{2-x_0^2}{(2+x_0^2)^2} = \frac{-1}{4}$ يكافئ $x_0^4+12=0$
بما أن $x_0^4+12 > 0$ فإن المعادلة $x_0^4+12=0$ ذات المجهول x_0 ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ و بالتالي لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=-\frac{1}{4}x$

3) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=-2x$
هذا معناه أن $f'(x_0) = -2$
$f'(x_0) = -2$ يكافئ $\frac{2-x_0^4}{(2+x_0^2)^2} = -2$ يكافئ $-2x_0^4 - 7x_0^2 - 10 = 0$ .... (1)
بوضع $x_0^2 = X_0$ المعادلة (1) تصبح $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$
$\Delta = 49-4(-2)(-10) < 0$
بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة $-2X_0^2 - 7X_0 - 10=0$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$.
و بالتالي لا يوجد مماس لـ (C_f) توازي المستقيم $y=-2x$.

تطبيق 6 دراسة قابلية الاشتقاق و حساب العدد المشتق

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x^3+|x|}{x^2+2}$

1) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0؟ فسر هندسيا هذه النتيجة.

2) احسب $f'(x)$ من أجل كل $x\neq0$.

✓ الحل

1) بما ان الدالة f تغير عبارتها في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من يمين و من يسار الصفر.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2-x}{x^2+2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2+2} = -\frac{1}{2} = \ell_1$$

منه f قابلة للاشتقاق من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{(x^2+2)x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = \ell_2$$

و منه f قابلة للاشتقاق من اليمين عند الصفر.

بما ان $\ell_2 \neq \ell_1$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و (C_f) له نصفا مماسين ميلها ℓ_1 و ℓ_2.

2) بما ان $\begin{cases} |x| = x \ , \ x \geq 0 \\ |x| = -x \ , \ x \leq 0 \end{cases}$ فإن $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+2} \ , \ x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+2} \ , \ x \leq 0 \end{cases}$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+2}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $\left(\frac{x^2+x}{x^2+2}\right)' = \frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2-x}{x^2+2}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ و لدينا $\left(\frac{x^2-x}{x^2+2}\right)' = \frac{x^2+4x-2}{(x^2+2)^2}$

إذن $\begin{cases} f'(x) = \frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2} \ , \ x > 0 \\ f'(x) = \frac{x^2+4x-2}{(x^2+2)^2} \ , \ x < 0 \end{cases}$

تطبيق 7 المماس العمودي لنحني

f دالة معرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني

أ) بين ان $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$

ب) عين $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}$ ، هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند الواحد؟

فسر هندسيا النتيجة المحصل عليها سابقا

✓ الحل

أ) $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} = \frac{x^2-x}{(x-1)\sqrt{x^2-x}} = \frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

ب) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} = +\infty$ لأن $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2-x} = \overset{+}{0}$.

نستنتج من نتيجة السؤال ب) أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين الواحد و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 يوازي محور التراتيب.

تطبيق 8 التقريب التآلفي

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x) = \sqrt{x^2+1}$ و $f(1) = 2$ باستعمال خطوة قدرها 0,1

أوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,1)$ و $f(1,2)$.

✓ الحل

لدينا $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$ و عليه

$$f(1,1) \approx f(1) + 0,1 \times f'(1) \approx 2 + 0,1 \times \sqrt{2} \approx 2,141$$

$$f(1,2) \approx f(1,1) + 0,1 \times f'(1,1) \approx 2,141 + 0,1 \times \sqrt{2,21} \approx 2,289$$

تطبيق 9 إنشاء المنحنى التقريبي باستعمال طريقة أولر

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,1[$

بحيث $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{1-x^2}$

باستعمال طريقة أولر و بخطوة قدرها 0,2 عين القيمة التقريبية لـ $f(1)$.

ثم انشئ التمثيل البياني المقرب لـ (C_f) على المجال $[0,1]$.

✓ الحل

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	1	1,20	1,40	1,58	1,74	1,86

- $f(0,2) \approx f(0)+0,2\, f'(0)$

$f(0,4) \approx f(0,2)+0,2\, f'(0,2)$

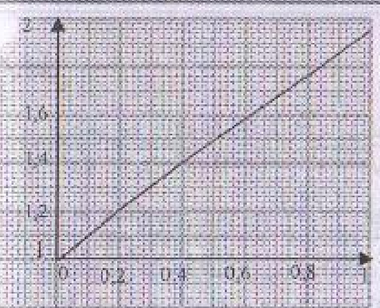
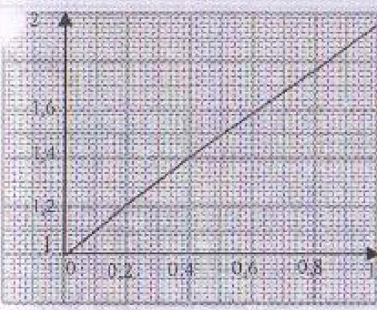
$f(0,6) \approx f(0,4)+0,2\, f'(0,4)$

$f(0,8) \approx f(0,6)+0,2\, f'(0,6)$

$f(1) \approx f(0,8)+0,2\, f'(0,8)$

منه القيمة التقريبية لـ $f(1)$ هي $1,86$

التمثيل البياني المقرب لـ (C_f) مشكل من القطع $[M_K M_{K+1}]$ مع $0 \le K \le 5$

تطبيق 10 إيجاد عبارة دالة

f دالة معرفة من اجل كل $x \neq 1$ بـ $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث a و b عددان حقيقيان. أوجد a و b بحيث الدالة f لها قيمة حدية محلية معدومة عند -1 .

الحل ✓

بما أن الدالة f لها قيمة حدية محلية عند $x=-1$ فإن $f'(-1)=0$

و بما أن القيمة الحدية المحلية عند $x=-1$ معدومة فإن $f(-1)=0$.

$f(-1)=0$ تكافئ $\frac{a-b+1}{-2}=0$ يكافئ $a-b+1=0$ .... (1) .

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا $f'(x)=\frac{ax^2-2ax-b-1}{(x-1)^2}$

إذن $f'(-1)=\frac{3a-b-1}{4}$

$f'(-1)=0$ يكافئ $3a-b-1=0$ ..... (2)

من (1) نجد $a=-1+b$ نعوضه في (2) نجد $b=2$

إذن $a=-1+2=1$ و بالتالي $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$

تطبيق 11 السرعة و التسارع اللحظيين

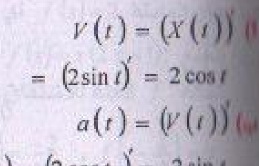
جسم معلق على حافة نابض يهتز أفقيا. معادلة حركته هي $X(t)=2\sin t$ مع X بالسنتيمتر و t بالثانية

أ) ما هي السرعة $V(t)$ عند اللحظة t.

ب) ما هو التسارع $a(t)$ عند اللحظة t ؟

جـ) ما هي العلاقة التي تربط بين $X(t)$ و $a(t)$ ؟ ثم أنشئ في نفس المعلم التمثيلات البيانية للحركة و التسارع و السرعة على المجال $[0,\pi]$.

الحل ✓



أ) $V(t)=(X(t))'$

$=(2\sin t)' = 2\cos t$

ب) $a(t)=(V(t))'$

$a(t)=(2\cos t)'=-2\sin t$

جـ) $a(t)=(-2\sin t)=-X(t)$

تطبيق 12 نظرية القيم المتوسطة و حل المعادلات

f دالة معرفة من اجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-x^2-x+\frac{5}{6}$.

1) شكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

3) نسمي α الحل الذي ينتمي الى $\left]-\frac{1}{3},1\right[$ أعط حصرا لـ α بتقريب 10^{-2}

الحل ✓

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3x^2-2x-1$

$f'(x)$ تكتب على الشكل $f'(x)=(x-1)(3x+1)$

- إذا كان $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty[$ فإن $f'(x)\ge 0$ و منه f متزايدة تماما على كل من $\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right]$ و $[1,+\infty[$

- إذا كان $x\in\left[-\frac{1}{3},1\right]$ فإن $f'(x)\le 0$ و منه f متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	−	0	+	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$\frac{55}{54}$	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$+\infty$

2) . بما أن $f' > 0$ على المجال $\left]-\infty , -\frac{1}{3}\right[$ و $0 \in \left]-\infty , \frac{55}{54}\right]$

فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في المجال $\left]-\infty , \frac{-1}{3}\right]$

- بما أن $f' < 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{3} , 1\right[$ و $0 \in \left]-\frac{1}{6} , \frac{55}{54}\right[$

فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في المجال $\left[-\frac{1}{3} , 1\right]$

. بما أن $f' > 0$ على المجال $]1 , +\infty[$ و $0 \in \left]-\frac{1}{6} , +\infty\right[$.

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1 , +\infty[$

إذن $f(x)=0$ لها ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$.

3) تعيين حصر لـ α باستعمال طريقة الديكوتومي

نضع : $a=-\frac{1}{3}$ ، $b=1$

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ ، $f(x_0) = \frac{23}{54} > 0$

$x_1 = \frac{x_0+b}{2} = \frac{2}{3}$ ، $f(x_1) = \frac{1}{54} > 0$

$x_2 = \frac{x_1+b}{2} = \frac{5}{6}$ ، $f(x_2) = \frac{-25}{216} < 0$

إذن الحل α ينتمي إلى $\left]\frac{2}{3} , \frac{5}{6}\right[$ و منه الحصر $0,66 < \alpha < 0,83$.

تطبيق 13 تعيين عدد حلول معادلة باستعمال دراسة دالة

حدد عدد الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلتين في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) $\sin x - x = 2$ ، ب) $x(2x+1)^2 = 5$.

✓ الحل

أ) نضع $f(x) = \sin x - x$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \cos x - 1$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) \leq 0$

ومنه $f'(x)$ سالب و ينعدم عند القيم من الشكل $x = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $1 \geq \sin x \geq -1$

وبإضافة $-x$ إلى حدود هذه الأخيرة نجد $1-x \geq \sin x - x \geq -1-x$

إذن حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ومنه $f(x)$ تنتمي إلى $]-\infty , +\infty[$.

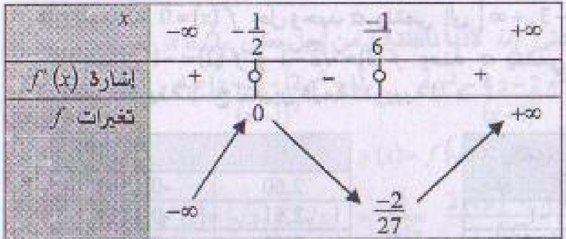
. بما أن $f'(x) \leq 0$ على $\mathbb{R}$ و 2 ينتمي إلى $\mathbb{R}$

فإن المعادلة $f(x) = 2$ أي $\sin x - x = 2$ لها حل وحيد α ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) نضع $f(x) = x(2x+1)^2$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = (2x+1)(6x+1)$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ، $f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{-2}{27}$



x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{6}$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	−	0	+	
تغيرات f	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{-2}{27}$	↗	$+\infty$

. الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty , -\frac{1}{2}\right]$ و $\left[-\frac{1}{6} , +\infty\right[$

و متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{2} , -\frac{1}{6}\right]$

. بما أن $f' > 0$ على $\left]-\infty , -\frac{1}{2}\right[$ و $5 \notin]-\infty , 0[$

فإن المعادلة $f(x) = 5$ أي $x(2x+1)^2 = 5$ ليس لها حلول في المجال $\left]-\infty , -\frac{1}{2}\right]$.

. بما أن $f' < 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{2} , \frac{-1}{6}\right[$ و $5 \notin \left]-\frac{2}{27} , 0\right[$

فإن المعادلة $x(2x+1)^2 = 5$ ليس لها حلول في المجال $\left[-\frac{1}{2} , \frac{-1}{6}\right]$.

. بما أن $f' > 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{6} , +\infty\right[$ و $5 \in \left]\frac{-2}{27} , +\infty\right[$

فإن المعادلة $f(x) = 5$ أي $x(2x+1)^2 = 5$ لها حل وحيد α ينتمي إلى المجال $\left]-\frac{1}{6} , +\infty\right[$

إذن للمعادلة $f(x) = 5$ حل وحيد α على $\mathbb{R}$.

تطبيق 14 تعيين القيمة المقربة و القيمة المضبوطة لحل معادلة

f دالة معرفة على المجال $]1 , +\infty[$ بالعبارة $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$

1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f.
2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ثم أعط حصرا له بتقريب 10^{-2} و أوجد بطريقة جبرية القيمة المضبوطة لـ α.

✓ الحل

1) الدالة f معرفة على $[1,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$

من اجل كل x من $]1,+\infty[$ لدينا $f'(x)\rangle 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$.

$f(1)=-3$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) - بما أن $f'\rangle 0$ و $0\in[-3,+\infty[$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي الى $[-3,+\infty[$

- نلاحظ ان $f(2)=-1$ و $f(3)=\sqrt{2}-1$ ومنه α ينتمي إلى $]2,3[$.

نستعمل طريقة المسح لتعيين قيمة تقريبية لـ α

x	$f(x)$
2,0	-1
2,1	-0,8511
2,2	-0,7045
2,3	-0,5598
2,4	-0,4167
2,5	-0,27
2,6	-0,1350
2,7	+0,0038

$p=0,1$

x	$f(x)$
2,60	-0,1350
2,61	-0,1211
2,62	-0,1072
2,63	-0,0932
2,64	-0,0793
2,65	-0,065
2,66	-0,051
2,67	-0,037
2,68	-0,0238
2,69	-0,01
2,70	+0,0038

$p=0,01$

إذن $2,68\langle\alpha\langle 2,70$ ومنه 2,70 هي القيمة المقربة بالزيادة لـ α إلى 10^{-2}.

• $f(x)=0$ يكافئ $x-4+\sqrt{x-1}=0$

يكافئ $(4-x)^2=x-1$ و $1\geq x\geq 4$

يكافئ $x^2-9x+17=0$

$\Delta=81-4(17)=81-68=13$

$x_1=\frac{9+\sqrt{13}}{2}$ و $x_2=\frac{9-\sqrt{13}}{2}$

x_1 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[1,4]$ إذن القيمة المضبوطة لـ α هي $\alpha=\frac{9-\sqrt{13}}{2}$.

تطبيق 15 حساب مشتق الدوال المركبة

1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$

2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية

أ) $g(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x}-1}$ ، ب) $h(x)=\frac{2x^4+1}{x^2-1}$.

جـ) $K(x)=\sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}$ ، د) $L(x)=\frac{2(\cos x)^4+1}{\cos x-1}$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها ناطقة و من أجل كل $x\in D_f$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$$

2) أ) يمكننا وضع $g(x)$ على الشكل $g(x)=f(\sqrt{x})$.

$$g'(x)=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\;\frac{2(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{2x-4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

ب) لدينا $h(x)=f(x^2)$ ومنه $h'(x)=(x^2)'f'(x^2)=2x\times\frac{2x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$

جـ) يمكننا وضع $K(x)$ على الشكل $K(x)=\sqrt{f(x)}$

$$K'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}}=\frac{(2x^2-4x-1)(\sqrt{x-1})}{(2\sqrt{2x^2+1})(x-1)^2}$$

د) لدينا $L(x)=f(\cos x)$ ومنه $L'(x)=(\cos x)'f'(\cos x)=-\sin x\times\frac{2(\cos x)^2-4\cos x-1}{(\cos x-1)^2}$

تطبيق 16 حساب مشتق دالة باستعمال مشتق دالة مركبة

f دالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\frac{2x+2}{x-2}$

1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

2) لتكن g دالة معرفة على المجال $I=]4,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=f(\sqrt{x})$.

بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل x من I

✓ **الحل**

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة و لدينا $f'(x)=\frac{-6}{(x-2)^2}$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $J=]2,+\infty[$

و الدالة $u: x\mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $I=]4,+\infty[$

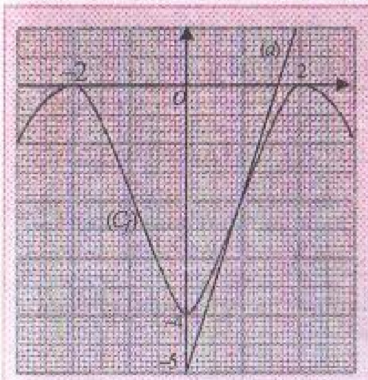
و من اجل كل x من I لدينا $u(x)\in J$

إذن الدالة $g=f\circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و من اجل كل x من I لدينا

$$g'(x)=u'(x)\times f'(u(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{-6}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{-3}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)^2}$$

تطبيق 17 حساب العدد المشتق بيانيا



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، تمثيلها البياني و المماسان عند النقطتين ذوتا الفاصلتين 1 و 0 كما هو مبين في الشكل المجاور.

لتكن g و h دالتين معرفتين من اجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x^2)$ و $g(x)=(f\circ f)(x)$

1) باستعمال هذا البيان عين $f(1)$ ، $f(-2)$ ، $f'(-2)$ ، $f'(1)$.

2) استنتج $g'(1)$ و $h'(1)$.

✓ **الحل**

1) من البيان نجد $f(1)=-2$ ، $f(-2)=0$

- لدينا $f'(-2)=0$ لأن المماس عند النقطة ذات الفاصلة -2 موازي لـ $(x'x)$.
- ميل المستقيم (d) هو $f'(1)$ حيث $f'(1)=\frac{-2+5}{1-0}=\frac{3}{1}=3$.

2) - بما ان $g(x)=f(f(x))$ فإن $g'(x)=f'(x)\times f'(f(x))$

إذن $g'(1)=f'(1)f'(f(1))$ اي $g'(1)=3\times f'(-2)=0$

- بما ان $h(x)=f(x^2)$ فإن $h'(x)=2x\,f'(x^2)$

إذن $h'(1)=2f'(1)=2\times 3=6$.

تطبيق 18 حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

أوجد نهاية الدالة f عند العدد a المعطى في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ، $a=0$ ، ب) $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ ، $a=0$

جـ) $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ، $a=2$ ، د) $f(x)=\frac{(x+2)^3-1}{x^2-1}$ ،

✓ **الحل**

إذا كانت نهاية دالة f عند a من الشكل $\frac{0}{0}$ و كانت $f(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

حيث g دالة قابلة للاشتقاق عند a فإن $\lim_{x\to a} f(x)=g'(a)$.

أ) بوضع $g(x)=\cos x$ نجد $g(0)=1$

و منه نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a=0$ و منه

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$.

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=-\sin x$ ومنه نجد $g'(0)=0$

إذن $\lim_{x\to0} f(x)=g'(0)=0$.

ب) بوضع $g(x)=\tan x$ نجد $g(0)=0$ و منه $f(x)$ تكتب بالشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و لدينا $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$.

من اجل كل $x\in D_g$ لدينا $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ومنه نجد $g'(0)=1$.

إذن $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=g'(0)=1$

جـ) بوضع $g(x)=\sqrt{x+7}$. نجد $g(2)=3$

و منه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-7,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a=2$

و بالتالي $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2+7}}=\frac{1}{6}$

إذن $\lim_{x\to2} f(x)=g'(2)=\frac{1}{6}$

د) بوضع $g(x)=(x+2)^3$ نجد $g(-1)=1$

ومنه $f(x)$ يكتب على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}$.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند $a=-1$ و لدينا $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)=3$

و $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$ و حسب قاعدة جداء النهايات نجد $\lim_{x\to-1} f(x)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{2}$

تطبيق 19 قاعدة لوبيتال

1) بين أنه إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند العدد x_0 و بحيث $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإن $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

2) استعمل هذه القاعدة لحساب :

أ) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ، ب) $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}$

جـ) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، د) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\sin x-1}{\sin x-\cos x+1}$

الحل

1) f و g قابلتان للاشتقاق عند x_0 هذا معناه أن :

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ و $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$.

بما أن $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإنه يمكن كتابة $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الشكل :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$ مع $x\neq x_0$.

إذن $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2) أ) نضع $f(x)=\sqrt{x+7}-3$ و $g(x)=x-2$

ومنه نجد $f(2)=g(2)=0$.

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=2$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{1}{6}$.

ب) نضع $f(x)=x^4-1$ و $g(x)=x^3+3x^2-4$ عندئذ $f(1)=g(1)=0$.

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=1$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{4}{9}$.

جـ) نضع $f(x)=\sin(2x)$ و $g(x)=x-\pi$ منه $g(\pi)=f(\pi)=0$.

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=\pi$.

ومنه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi}=\frac{f'(\pi)}{g'(\pi)}=2$

د) نضع $f(x)=\cos x+\sin x-1$ و $g(x)=\sin x-\cos x+1$ عندئذ $f(0)=g(0)=0$

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=0$

ومنه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\sin x-1}{\sin x-\cos x+1}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=1$.

تطبيق 20 المشتقات المتتابعة

f دالة معرفة من أجل كل $x\neq-1$ بـ $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$.

2) خمن عبارة $f^{(n)}(x)$ من أجل كل $n\geq1$ ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

الحل

1) $f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ ، $f^{(2)}(x)=f'\left(f^{(1)}(x)\right)=\frac{2}{(x+1)^3}$

$f^{(3)}(x)=f'\left(f^{(2)}(x)\right)=\frac{-6}{(x+1)^4}$ ، $f^{(4)}(x)=f'\left(f^{(3)}(x)\right)=\frac{24}{(x+1)^5}$

2) نلاحظ أن $-1=(-1)^1\times1!$ ، $2=(-1)^2\times2!$ ، $-6=(-1)^3\times3!$ ، $24=(-1)^4\times4!$

لأن عبارة $f^{(n)}(x)$ تكون من الشكل $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times n!}{(x+1)^{n+1}}$.

نسمي p_n الخاصية المراد إثباتها.

من أجل $n=1$ لدينا $f^{(1)}=\frac{-1}{(x+1)^2}=\frac{(-1)^1\times1!}{(x+1)^2}$

و منه p_1 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة أي $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$.

$$f^{(n+1)}(x) = f'\left(f^{(n)}(x)\right) = \frac{-(n+1)(-1)^n \times n!(x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}}$$

$$= \frac{[(n+1) \times n!] \times (-1)^{n+1} \times (x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}} = \frac{(n+1)! \times (-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}}$$

ومنه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$.

تطبيق 21 نقطة الإنعطاف

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.

1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$ و $f^{(n)}(x)$ مع $n \geq 1$.

2) عين إشارة $f^{(2)}(x)$ ماذا تستنتج؟

✓ الحل

1) $f^{(1)}(x) = f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$f^{(2)}(x) = f'\left(f^{(1)}(x)\right) = 2x - 4$.

$f^{(3)}(x) = f'\left(f^{(2)}(x)\right) = 2$

$f^{(4)}(x) = f'\left(f^{(3)}(x)\right) = 0$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f^{(n)}(x) = 0$

2) $f^{(2)}(x)$ ينعدم عند $x = 2$ مغيرا إشارته في جوار 2

إذن $M_0(2, f(2))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f).

- إذا انعدم $f^{(1)}(x)$ عند x_0 و لا يغير إشارته فإن $M_0(x_0, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

تطبيق 22 دراسة اتجاه تغير دالة

ادرس اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية:

أ) $f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 2$ ، ب) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-5}$

جـ) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{1-x}$ ، د) $f(x) = \dfrac{3-x^2}{3+x^2}$

هـ) $f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$ ، و) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

ن) $f(x) = \cos^2 x - 2$ على المجال $[0, \pi]$

✓ الحل

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = 3x^2 + 2x + 5$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $3x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(3)(5) = -56$

$\Delta < 0$ منه المعادلة $3x^2 + 2x + 5 = 0$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $f'(x)$ من إشارة معامل (x^2)

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $f'(x) > 0$. و عليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$ و لدينا $f'(x) = \dfrac{-11}{(x+5)^2}$

من أجل كل x من D_f لدينا $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, 5[$ و $]5, +\infty[$.

جـ) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ و لدينا $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $(x = -1)$ أو $(x = 3)$.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x^2+2x+3)$.

- إذا كان x ينتمي إلى $[-1, 3]$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[-1, 3]$.

- إذا كان $x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$ فإن $f'(x) \leq 0$

و منه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1]$ ، $[3, +\infty[$.

د) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \dfrac{-12x}{(3+x^2)^2}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$.

- إذا كان $x \leq 0$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $]-\infty, 0]$

- إذا كان $x \geq 0$ فإن $f'(x) \leq 0$ و منه f متناقصة تماما على $[0, +\infty[$.

هـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ و لدينا $f'(x) = \dfrac{2(1+x)(1-x)}{(x+1)^4}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 1$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x)(1+x)$.

- إذا كان $x \in]-1, 1]$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $]-1, 1]$

- إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$ فإن $f'(x) \leq 0$

و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $[1, +\infty[$.

و) الدالة f قابلة للاشتقاق على $D=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$ و $x\in D$.

بما أن $0\notin D$ فإن المعادلة $f'(x)=0$ ليس لها حلولا في D .

- إذا كان $x\rangle 2$ فإن $f'(x)\rangle 0$ و منه f متزايدة تماما على $]2,+\infty[$.
- إذا كان $x\langle -2$ فإن $f'(x)\langle 0$ و منه f متناقصة تماما على $]-\infty,-2[$.

ن) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$ و لدينا $f'(x)=-2\sin x\cos x$.

$f'(x)=0$ يكافئ ($x=0$ أو $x=\pi$) أو $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$.

- إذا كان $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $f'(x)\leq 0$ منه f متناقصة تماما على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- إذا كان $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ فإن $f'(x)\geq 0$ منه f متزايدة تماما على $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

تطبيق 23 استعمال إشارة دالة لتعيين اتجاه دالة أخرى

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-4x^3+6x^2-6x+2$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

2) عين عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$ ثم اعط حصرا لها.

3) استنتج من الأسئلة السابقة إشارة f .

4) g دالة معرفة بـ $g(x)=-x^4+2x^3-3x^2+2x$.

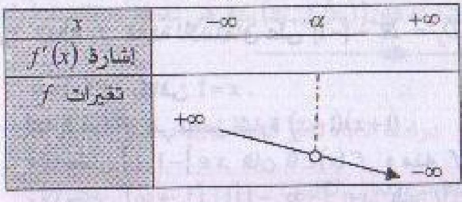
أ) باستعمال الأسئلة السابقة عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $g(x)\leq\frac{7}{16}$

الحل ✓

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -4x^3 = -\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = -12x^2+12x-6$



x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$			
تغيرات f	$+\infty$	↘	$-\infty$

$f'(x)=0$ يكافئ $2x^2-2x+1=0$

المعادلة $2x^2-2x+1=0$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ لأن مميزها سالب

إذن المشتق لا ينعدم و بالتالي إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة معامل (x^2)

و عليه $f'(x)\langle 0$.

2) بما أن $f'\langle 0$ على $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$

حيث $0\langle\alpha\langle 1$ لأن $f(0)\rangle 0$ و $f(1)\langle 0$ و باستعمال طريقة ديكتومي نجد $\alpha=\frac{1}{2}$.

3) إذا كان $x\rangle\alpha$ فإن $f(x)\langle 0$ و إذا كان $x\langle\alpha$ فإن $f(x)\rangle 0$

4) أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=f(x)$

- $g'(x)=0$ يكافئ $f(x)=0$ يكافئ $x=\alpha$.
- إذا كان $x\rangle\alpha$ فإن $g'(x)\langle 0$ و عليه الدالة g متناقصة تماما على $]\alpha,+\infty[$.
- إذا كان $x\langle\alpha$ فإن $g'(x)\rangle 0$ و عليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty,\alpha[$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	0	−	
تغيرات g	$-\infty$	↗	$g(\alpha)$	↘	$-\infty$

من جدول تغيرات g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)\leq g(\alpha)$ و بما أن $g(\alpha)=\frac{7}{16}$ فإن $g(x)\leq\frac{7}{16}$

تطبيق 24 دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$

و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) احسب نهاية f عند $-\infty$ و عند $(+\infty)$.

ب) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) .

2) ادرس نهاية f عند -2 . ماذا تستنتج ؟

3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن $H\left(-2,\frac{-3}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) ثم ارسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

الحل ✓

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$

ب) $y=x+\frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{8}{2x+4}=0$$

إذن $y=x+\frac{1}{2}$ معادلة المستقيم المقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

2) بما ان $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2+5x+10)=8$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2}(2x+4)=\overset{+}{0}$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2}(2x+4)=\overset{-}{0}$

فإن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x)=-\infty$

ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=-2$ مقارب عمودي لـ (C_f).

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f و لدينا $f'(x)=\frac{2x(x+4)}{2(x+2)^2}$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$f'(x)=0$ تكافئ $(x=0)$ او $(x=-4)$.

- إذا كان $x\in[-4,-2[\cup]-2,0]$ فإن $f'(x)\leq 0$ و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين $[-4,-2[$ و $]-2\ ,\ 0]$.

- إذا كان $x\in]-\infty\ ,\ -4]\cup[0\ ,\ +\infty[$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-4]$ و $[0,+\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$f(-4)$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

$f(0)=2,5$ و $f(-4)=-5,5$

4) $H(-2,-1,5)$ مركز تناظر لـ (C_f)

إذا و فقط إذا كان

$f(2(-2)-x)=-f(x)+2(-1,5)$

$f(2(-2)-x)=\frac{2x^2+11x+22}{-2x-4}$

$-3-f(x)=\frac{-2x^2-11x-22}{2x+4}$

ومنه نستنتج أن :

$f(2(-2)-x)=-f(x)+2(-1,5)$

إذن H هي مركز تناظر لـ (C_f)

تطبيق 25 دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=x^3-3x-3$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

ب) بين ان المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد على $\mathbb{R}$ نرمز له بـ α ثم

- اعط حصرا له بتقريب 10^{-2}

جـ) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$

أ) بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$.

ب) استنتج اتجاه تغير f على $]1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات f على D_f.

جـ) بين أن $f(\alpha)=3\alpha+1$

د) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس الوضع النسبي لهذا المستقيم بالنسبة إلى (C_f).

هـ) أوجد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم المقارب المائل. ثم ارسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

✓ الحل

1) أ) دراسة تغيرات g

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=3x^2-3$.

$g'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

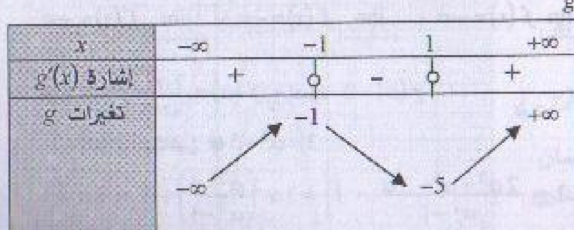
- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $g'(x)<0$

و منه g متناقصة تماما على $[-1,1]$

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $g'(x)>0$

و منه g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة g



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	0	−	0	+	
تغيرات g	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

ب) بما أن $g'(x)\geq 0$ على المجال $]1,+\infty[$ و $0\in[g(1),+\infty[$ فإن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد α ينتمي إلى المجال

$]1,+\infty[$

ـ بما ان $g'(x)\rangle 0$ على $]-\infty,-1[$ و $g(-1)[\ ]-\infty,$ $0\notin$

فإن المعادلة $g(x)=0$ ليس لها حلولا في المجال $]-\infty,-1[$.

ـ بنفس الطريقة نبين ان المعادلة $g(x)=0$ ليس لها حلولا في $[-1,1]$.

إذن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد α في $\mathbb{R}$

نلاحظ ان $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ ومنه $\alpha\in]2,3[$

باستعمال طريقة الديكتومي نجد $2,06\langle\alpha\langle 2,12$

ج) إذا كان $x\in]-\infty,\alpha[$ فإن $g(x)\langle 0$

و إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ فإن $g(x)\rangle 0$.

2) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f و لدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\times g(x)$

إذا كان $x\rangle 1$ فإن $\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\rangle 0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]1,+\infty[$

ب) ـ إذا كان $x\in]1,\alpha[$ فإن $f'(x)\langle 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]1,\alpha[$.

ـ إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ فإن $f'(x)\rangle 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $]\alpha,+\infty[$.

• اتجاه تغير f على $]-1,1[\cup]-\infty,-1[$:

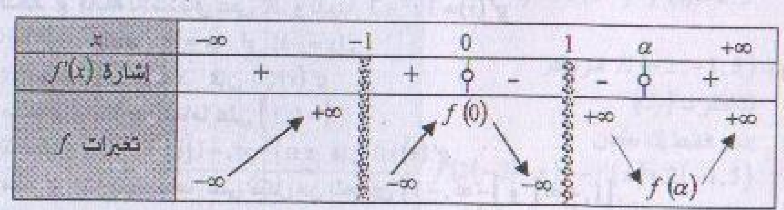
ـ إذا كان $x\in]-\infty,-1[$ فإن $\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\langle 0$ و $g(x)\langle 0$ وبالتالي $f'(x)\rangle 0$

إذن f متزايدة تماما على $]-\infty,-1[$.

ـ إذا كان $x\in]0,1[$ فإن $f'(x)\langle 0$ منه f متناقصة تماما على $]0,1[$.

ـ إذا كان $x\in]-1,0[$ فإن $f'(x)\rangle 0$ منه f متزايدة تماما على $]-1,0[$.

• جدول تغيرات f على D_f :



x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
تغيرات f	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=+\infty$

ج) $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}+1$ و لدينا $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ يكافئ $3=\alpha^3-3\alpha$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}+1=\frac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}+1=3\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}\right)+1=3\alpha+1$$

د) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

إذن (d) : $y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ـ الوضع النسبي لـ (d) بالنسبة إلى (C_f) .

$$f(x)-(2x+1)=\frac{2x+3}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+1$		$+\infty$
$2x+3$		-	0	+		+		+	
x^2-1		+		+	0	-	0	+	
$f(x)-(2x+1)$		-	0	+	‖	-	‖	+	

إذا كان x ينتمي إلى أحد المجالين ، $]-\infty,-\frac{3}{2}[$ و $]-1,1[$ فإن (C_f) يقع تحت (d)

ـ إذا كان $x\in]-\frac{3}{2},-1[\cup]1,+\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (d)

ـ (d) يقطع (C_f) في النقطة $A\left(-\frac{3}{2},-2\right)$.

هـ) ميل المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $f'(x_0)$.

المماس يوازي (d) هذا معناه ان $f'(x_0)=2$

$f'(x_0)=2$ يكافئ $x_0^2+3x_0+1=0$

$x_0^2+3x_0+1=0$ ..... (1)

منه $\Delta=3^2-4(1)(1)=5$

المعادلة (1) ذات المجهول x_0 لها حلان هما ،

$x_0'=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ و $x_0''=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$

إذن المنحني (C_f) له مماسان عند النقطتين ذات الفاصلتين ، x_0'' و x_0' يوازيان (d) .

تطبيق 26 عائلة المنحنيات

1) لتكن f_0 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_0(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و (γ_0) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

أ) ادرس تغيرات f_0 على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) عين معامل توجيه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1

2) من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة f_n بـ $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^2}$.

أ) ادرس تغيرات f_1 ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $f_n'(x)$ له نفس إشارة x ثم استنتج اتجاه تغير f_n.

جـ) برهن ان المنحنيين (γ_1) ، (γ_2) للدالتين f_1 و f_2 على الترتيب يقبلان مستقيما مقاربا افقيا يطلب تعيينه.

د) برهن ان المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لبيان الدالة f_3.

3) أ) برهن ان جميع منحنيات الدوال f_n تمر من نقطة ثابتة A.

ب) عبر بدلالة n عن معامل توجيه المماس للمنحنيات (γ_n) عند النقطة A

جـ) ارسم المنحنيات (γ_0) ، (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_3).

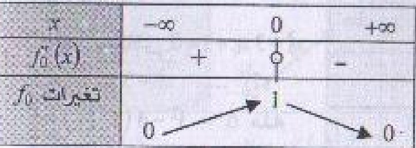
✓ الحل

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_0'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f_0'(x)=0$ يكافئ $x=0$.

- إذا كان $x > 0$ فإن $f_0'(x) < 0$ و منه f_0 متناقصة تماما على $]0,+\infty[$
- إذا كان $x < 0$ فإن $f_0'(x) > 0$ منه f_0 متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		+	0	−	
تغيرات f_0	0	↗	1	↘	0

ب) معامل توجيه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو $f_0'(1)=-\frac{1}{2}$.

2) أ) $f_1(x)=\frac{x}{1+x^2}$ ، $D_{f_1}=\mathbb{R}$.

الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_1'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f_1'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=-1)$.

- إذا كان $x \in]-1,1[$ فإن $f_1'(x) > 0$ منه f_1 متزايدة تماما على $]-1,1[$.
- إذا كان $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f_1'(x) < 0$ ومنه f_1 متناقصة تماما على كل من المجالين $]+1,+\infty[$ ، $]-\infty,-1[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f_1'(x)$		−	0	+	0	−	
تغيرات f_1	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

ب) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}\left[(n-2)\,x^2+n\right]}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $n \geq 2$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $(n-2)\,x^2+n \geq 0$

و منه إشارة $f_n'(x)$ هي نفس إشارة x^{n-1} اي نفش إشارة x .

- إذا كان $x > 0$ فإن $f_n'(x) > 0$ و منه f_n متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.
- إذا كان $x < 0$ فإن $f_n'(x) < 0$ منه f_n متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0[$.

جـ) بما ان $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f_1(x)=0$ فإن (γ_1) له مستقيم مقارب افقي معادلته $y=0$ بجوار $(+\infty)$ ، $-\infty$

بما ان $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f_2(x)=1$ فإن (γ_2) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

د) $y=x$ مقارب مائل لـ (γ_3) إذا و فقط إذا كان $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f_3(x)-x)=0$.

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left[f_3(x)-x\right] = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+1}-x = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1}=0$$

إذن $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (γ_3) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) أ) نفرض ان (γ_{n_1}) و (γ_{n_2}) يمران من نقطة ثابتة $A(x_0, y_0)$ حيث $n_1 \neq n_2$.

$A \in (\gamma_{n_1})$ هذا معناه ان،

$y_0 = \frac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2}$ .... (1)

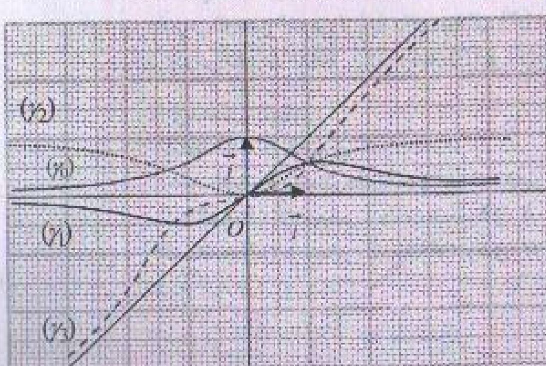
$A \in (\gamma_{n_2})$ هذا معناه ان

$y_0 = \frac{x_0^{n_2}}{1+x^2}$ ... (2)

من (1) و (2) نجد ،

$\frac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2} = \frac{x_0^{n_2}}{1+x_0^2}$

منه نستنتج $x_0^{n_1} = x_0^{n_2}$



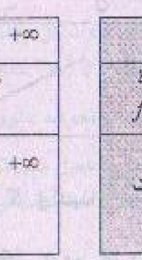
و بما أن $n_1 \neq n_2$ فإن $x_0 = 1$ و عليه $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

ب) معامل توجيه المماس لـ (γ_n) عند A هو $f'_n(1)$.

$$f'_n(1) = \frac{1[(n-2)+n]}{(1+1)^2} = \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f'_2(x)$		-	‖	+	
تغيرات f_2	-1	↘	0	↗	1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f'_3(x)$		+	‖	+	
تغيرات f_3	$-\infty$		↗		$+\infty$



تطبيق 27 المنحنى المقارب - حجم مخروط دوراني

1) f دالة معرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$. نسمي (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (طول الوحدة 4cm).

ا) تحقق أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ يكون $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$.

ب) ادرس نهاية f عند 1 و عند $(+\infty)$.

جـ) (P) المنحني الممثل للدالة g المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ $g(x) = x^2 + 1$.

- ما هي نهاية $[f(x) - g(x)]$ لما x يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

- ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (P)

د) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (P) و (γ) في نفس المعلم السابق.

2) في الشكل المجاور.

- المثلث ABC قائم في B .

- نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $OB = 1$.

- المستقيم (BC) مماس لنصف الدائرة في B .

- المستقيم (AC) مماس لنصف الدائرة في H .

نضع $BC = x$ و $AB = h$

ا) بين أن $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ ثم استنتج

المساويات التالية $h = x\sqrt{(h-1)^2 - 1}$ و $x^2 = \frac{h}{h-2}$ و $h = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

ب) بتدوير المثلث ABC حول المستقيم (AB) نحصل على مخروط دوراني رأسه A و إذا علمت أن حجم المخروط الذي ارتفاعه h و مساحة قاعدته S هو $V = \frac{h \times S}{3}$ ، عبر عن $V(x)$ حجمه بدلالة x .

جـ) باستعمال النتائج المحصل عليها في السؤال (ا) عين القيمة x التي من أجلها يكون حجم المخروط أصغريا ثم عين من أجل القيمة المحصل عليها الزاوية $B\hat{A}C$ بتقريب 0,1 درجة.

✓ الحل

1) ا) من أجل كل $x \rangle 1$ لدينا
$$f(x) = \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 1}$$
$$= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$$

ب) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4}{x^2-1} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = \overset{+}{0}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

جـ) من أجل كل $x \rangle 1$ لدينا $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

منه نستنتج أن (P) منحنى مقارب لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

- إذا كان $x \rangle 1$ فإن $\frac{1}{x^2-1} \rangle 0$

و منه المنحني (γ) يقع فوق (P) .

د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ و لدينا $f'(x) = \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = \sqrt{2}$.

- إذا كان $x \rangle \sqrt{2}$ فإن $f'(x) \rangle 0$

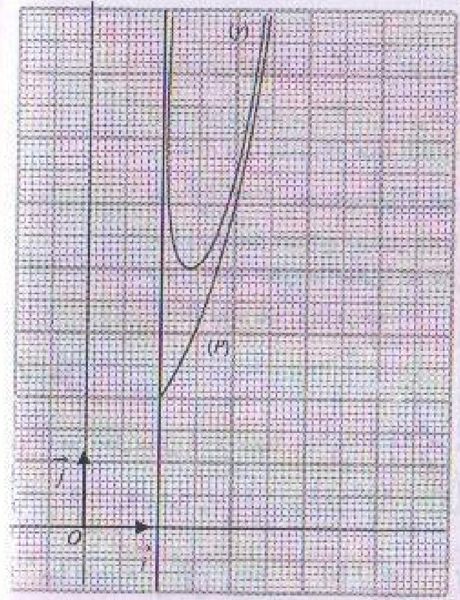
ومنه f متزايدة تماما على $]\sqrt{2}, +\infty[$

- إذا كان $1 \langle x \langle \sqrt{2}$ فإن $f'(x) \langle 0$

ومنه f متناقصة تماما على $]1, \sqrt{2}]$

$f(2) \approx 5,33$ ، $g(2) = 5$

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$



2) أ) في المثلث القائم ABC لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} \quad ..... \ (1)$$

و في المثلث القائم AOH لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{OH}{AH} \quad .... \ (2)$$

من (1) و (2) نجد $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ .... (I)

- استنتاج المساوات

بما ان H نقطة من نصف الدائرة

فإن $OH = 1$

ومنه المساواة (I) تصبح $\frac{1}{AH} = \frac{x}{h}$

إذن $h = AH \times x$.

في المثلث OAH لدينا :

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

ومنه $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2}$

لكن $OA = AB - OB = h - 1$

إذن $AH = \sqrt{(h-1)^2 - 1}$ بالتالي $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$.

- بتربيع المساواة $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$ نجد $h^2 = \left[(h-1)^2 - 1\right] \times x^2$ و منه ،

$x^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2 - 1}$ اي $x^2 = \frac{h^2}{h^2 - 2h} = \frac{h}{h-2}$

- من المساواة $x^2 = \frac{h}{h-2}$ نجد $h(x^2-1) = 2x^2$ بالقسمة على $x^2 - 1$ نجد $h = \frac{2x^2}{x^2-1}$

ب) $V(x) = \frac{h \times S}{3}$ و $S = \pi \times BC^2 = \pi x^2$

إذن $V(x) = \frac{2x^2}{x^2-1} \times \frac{\pi x^2}{3} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{x^4}{x^2-1}\right)$

جـ) نلاحظ ان $V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x)$ اي $V(x) = \lambda f(x)$

بما ان $\lambda \rangle 0$ فإن V و f لهما نفس اتجاه تغير و بما ان f لها قيمة صغرى عند $x = \sqrt{2}$

فإن V لها قيمة صغرى عند $\sqrt{2}$ و في هذه الحالة $V = \frac{2\pi}{3} f(\sqrt{2}) = \frac{8\pi}{3}$

$$\tan(B\hat{A}C) = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x^2-1}{2x} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و منه $B\hat{A}C \approx 19{,}52°$

تطبيق 26 المسافة الأعظمية و دوال كثيرة الحدود

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 1 - x^2$

(C_f) و (C_g) المنحنيان الممثلان لـ f و g في معلم متعامد و متجانس.

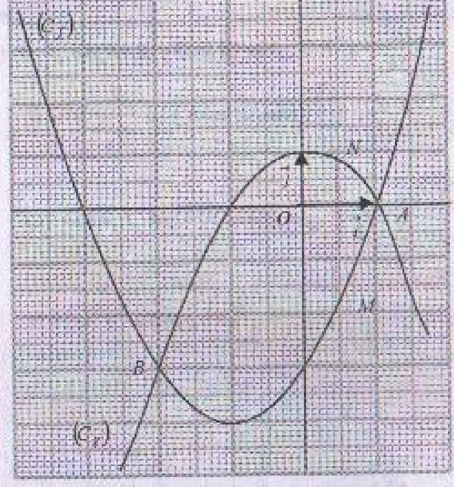
أ) ارسم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.

ب) M و N نقطتان من (C_f) و (C_g) على الترتيب فاصلتيهما t مع $t \in [-2, 1]$. من أجل اي قيمة لـ t تكون MN اعظمية ؟ ثم احسبها.

الحل

أ) - المنحنيان (C_f) و (C_g) عبارة عن قطعين مكافئين

- (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطتين $A(1,0)$ و $B(-2,-3)$



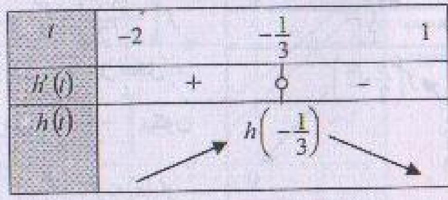
ب) $M(t, f(t))$ ، $N(t, g(t))$

$$MN = \sqrt{(t-t)^2 + (f(t) - g(t))^2}$$
$$= |f(t) - g(t)| = g(t) - f(t)$$
$$= -3t^2 - 2t + 4$$

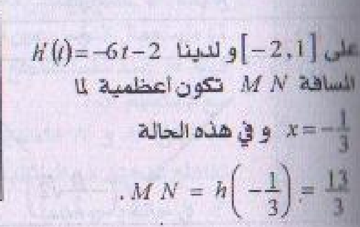
نضع $h(t) = -3t^2 - 2t + 4$

الدالة h قابلة للاشتقاق

على $[-2, 1]$ و لدينا $h'(t) = -6t - 2$



t	-2	$-\frac{1}{3}$	1
$h'(t)$	$+$	0	$-$
$h(t)$	↗	$h\left(-\frac{1}{3}\right)$	↘



المسافة MN تكون أعظمية لما $x = -\frac{1}{3}$ و في هذه الحالة

$MN = h\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3}$.

تطبيق 29 المسافة الأعظمية و الدوال الجذرية

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = x\sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}$ حيث p حقيقي موجب تماما.

ا) تحقق ان f معرفة على $\left[\frac{-\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$.

ب) ادرس اتجاه تغير f ثم بين ان f لها قيمة اعظمية من اجل $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

2) نهتم الآن بكل المعينات التي محيطها ρ و طول احد قطريها x.

ا) عبر عن مساحة هذه المعينات بدلالة x و ρ.

ب) باستعمال السؤال الأول، عين من بين المعينات تلك التي لها مساحة اعظمية و ما طبيعة هذا المعين ؟


الحل

(1 ا) f معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{\rho^2}{4}-x^2 \geq 0$

$\frac{\rho^2}{4}-x^2 \geq 0$ إذا و فقط إذا كان $x \in \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ و منه $D_f=\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$.

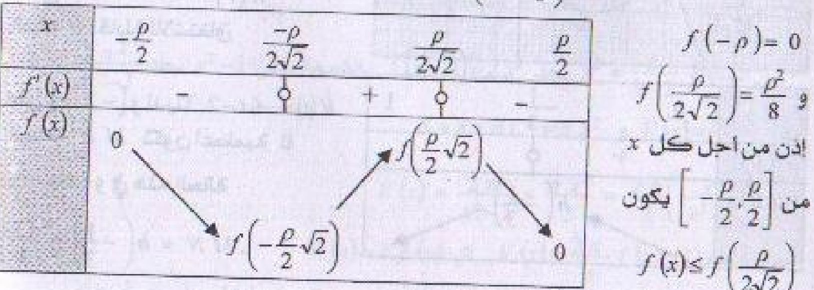
ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right[$ و لدينا $f'(x) = \dfrac{-2\left(x^2-\frac{\rho^2}{8}\right)}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}}$

$f'(x)=0$ يكافئ $\left(x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ أو $\left(x=\frac{-\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $\left(x^2-\frac{\rho^2}{8}\right)$.

$f(-\rho)=0$

و $f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\rho^2}{8}$



x	$-\frac{\rho}{2}$		$\frac{-\rho}{2\sqrt{2}}$		$\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$		$\frac{\rho}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f\left(-\frac{\rho}{2}\sqrt{2}\right)$	↗	$f\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{2}\right)$	↘	0

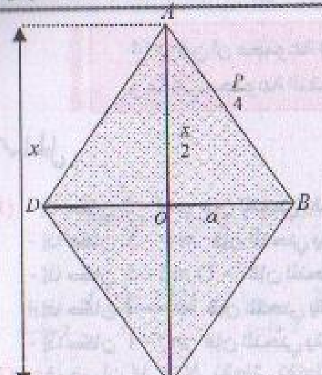
إذن من أجل كل x من $\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ يكون $f(x) \leq f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

ومنه f لها قيمة اعظمية من اجل $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

(2 ا) نسمي A مساحة المعين المفروض $A(x)=S_T \times 4$

حيث S_T مساحة المثلث OAB.

$S_T=\frac{\alpha}{2}\times\frac{x}{2}=\frac{\alpha x}{4}$ ومنه $A=\alpha x$



لدينا $\alpha^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{\rho}{4}\right)^2$

ومنه $\alpha=\sqrt{\frac{\rho^2}{16}-\frac{x^2}{4}}$ اي $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}$

إذن $A(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}=\frac{1}{2}f(x)$

ب) بما ان f و $\frac{1}{2}f$ لهما نفس اتجاه تغير فإن $\frac{1}{2}f$

اي A لها قيمة اعظمية عند $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

إذن يوجد معين واحد من بين المعينات له مساحة اعظمية هي $A\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ و محيطه ρ.

في هذه الحالة (أي لما $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$) قيمة α هي $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^2}{8}}=\frac{1}{2}\,\frac{\rho}{2\sqrt{2}}=\frac{\rho}{4\sqrt{2}}$.

بما أن $OA=OB$ فإن $ABCD$ مربع.

تطبيق 30 الدوال و المحل الهندسي

المنحنى ذو المعادلة $y=x-3+\frac{1}{x}$ ممثل في الشكل المجاور.

d مستقيم معادلته $y=m$ حيث m عدد حقيقي معطى.

1) باستعمال المنحنى عين حسب قيم m عدد نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم d.

2) لتكن M و N نقطتين تقاطع المنحنى مع المستقيم d في حالة وجودهما. تحقق أن فاصلتهما x_M و x_N هما حلول للمعادلة $x^2-(m+3)x+1=0$

3) I منتصف $[MN]$ تحقق ان $\left(\frac{m+3}{2}, m\right)$ إحداثيتا I

من $\left]2\,,\frac{4}{\sqrt{5}}\right[$ يكون $f'(x)<0$

- إليك جدول تغيرات f

x	0		$\frac{4}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
تغيرات f	2	↗	$2\sqrt{5}$	↘	4	↗	$+\infty$

$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)=2\sqrt{5}\approx 4{,}47$

4) بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$

فإن $y=3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

5) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$ فهي تقابل و بالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1} من $]4,+\infty[$ في $]2,+\infty[$

$f^{-1}:[4,+\infty[\to[2,+\infty[$

$y\mapsto x=f^{-1}(y)$

إيجاد عبارة $f^{-1}(x)$

من اجل كل $y\geq 4$ لدينا $y=2x+\sqrt{x^2-4}$ و منه $3x^2-4xy+y^2+4=0$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x_1=\frac{2y+\sqrt{y^2-12}}{3}$ ، $x_2=\frac{2y-\sqrt{y^2-12}}{3}$

x_2 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $]2,+\infty[$.

إذن $f^{-1}(y)=\frac{2y+\sqrt{y^2-12}}{3}$

تمارين و مسائل

1

باستعمال الدوال المشتقة للدوال المرجعية التالية عين معامل توجيه المماس لمنحنيات هذه الدوال عند النقطة ذات الفاصلة a المعطاة.

أ) $f(x)=x^2$ ، $a=-3$ ، ب) $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $a=1$ ، جـ) $K(x)=\sqrt{x}$ ، $a=4$

2

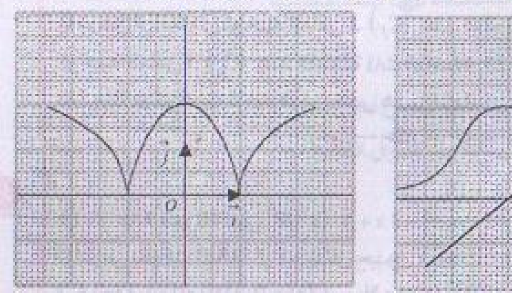
من اجل كل دالة من الدوال التالية ما هي الدالة القابلة للاشتقاق عند العدد المعطى ؟

أ) $f(x)=x\sqrt{x}$ ، $a=0$ ؛ ب) $f(x)=\sqrt{x-3}$ ، $a=3$

جـ) $f(x)=|x+3|x$ ، $a=-3$ ؛ د) $f(x)=\frac{|x|+1}{|x|-2}$ ، $a=0$

3

إليك التمثيلان البيانيان للدالتين f و g . بقراءة بيانية هل الدالتان قابلتان للاشتقاق عند القيمة -1 ؟ و في حالة نعم عين العدد المشتق لكل من الدالتين f و g عند -1 .





4

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f :

أ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ ؛ ب) $f(x)=(2x-1)^3$ ؛ جـ) $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+3}$

د) $f(x)=3x-\frac{1}{2x+1}$ ؛ هـ) $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+4x+5}$ ؛ و) $f(x)=x^3\sqrt{x}$



ن) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ ، ي) $f(x)=2x\left(x^2+1\right)^3$

5

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية على المجال I المعطى :

أ) $f(x)=x\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، ب) $f(x)=\cos x\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$

جـ) $f(x)=\tan x$ ، $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، د) $f(x)=\frac{2+\cos x}{2+\sin x}$ ، $I=[0,2\pi]$

هـ) $f(x)=x+\sin x$ ، $I=[0,2\pi]$

6

(γ) المنحني البياني للدالة f المعرفة من أجل كل $x\neq-1$ بـ $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$.

1) أعط معادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$.

2) هل يوجد مماس لـ (γ) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=2x$ ؟

3) هل يوجد مماس لـ (γ) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ ؟

7

f و g دالتان معرفتان على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$

أ) برهن أن معامل توجيه المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو نفس معامل توجيه المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0,25 .

ب) ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص هذين المماسين ؟

8

1) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x+5$

أ) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) تحقق أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا محصورا بين -3 و -2 ثم أعط قيمة مقربة له بتقريب 10^{-1}

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=3x^4+4x^3-12x^2+4$

أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) عين عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ ثم من أجل كل حل عين حصرا له بسعة 10^{-1} (طول مجال الحصر هو 10^{-1})

9

f دالة معرفة على $[-1,3]$ بحيث $f(1)=3$ و التمثيل البياني للدالة المشتقة (كما في الشكل) باستعمال خطوة قدرها 0,1 عين القيمة المقربة لـ $f(1,1)$.

10

f دالة قابلة للاشتقاق على $[-2,2]$ و بحيث $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{9-x^2}$.

1) باستعمال طريقة أولر بخطوة قدرها 0,5 عين قيمة مقربة لـ $f(2)$

2) ارسم المنحني البياني المقرب للدالة f على المجال $[0,2]$ ثم على المجال $[-2,0]$

11

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $\sqrt{1+x^2}\times f'(x)=f(x)$

2) استنتج أنه من أجل كل حقيقي x يكون $\left(1+x^2\right)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$

12

1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة من أجل كل $x\neq2$ بـ $f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$

2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$g: x\mapsto\frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ ، $h: x\mapsto\frac{x^4+3}{x^2-2}$

$K: x\mapsto\sqrt{\frac{x^2+3}{x-2}}$ ، $L: x\mapsto\frac{\sin^2x+3}{\sin x-2}$

13

في كل حالة من الحالات التالية عين المجال الذي تكون فيه f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

أ) $f(x)=\sin^3(2x)$ ، ب) $f(x)=\cos^3(5x)$

جـ) $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ ، د) $f(x)=\frac{1}{4\cos^2x-1}$

14 -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{3x+5}{x-2}$

1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

2) نرمز بـ g إلى الدالة المعرفة على $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[=I$ بـ $g(x)=f(\cos(x))$

بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل x من I.

3) نرمز بـ h إلى الدالة المعرفة على المجال $J=]4,+\infty[$ بـ $h(x)=f(\sqrt{x})$

بين أن h قابلة للاشتقاق على J ثم احسب $h'(x)$ من أجل كل x من J.

15 -

- إذا كانت f دالة فردية و قابلة للاشتقاق على I ماذا يمكن القول عن شفعية f'.
- إذا كانت f دالة زوجية و قابلة للاشتقاق على J ماذا يمكن القول عن شفعية f'.

16 -

باستعمال العدد المشتق اوجد نهاية f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2-1}{x+2}$ ، $a=-1$ ب) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ ، $a=-1$

جـ) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$ ، $a=0$ د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$ ، $a=0$

هـ) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x}$ ، $a=0$ و) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ ، $a=1$

ن) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، $a=\pi$ ي) $f(x)=\dfrac{\tan(x)}{x}$ ، $a=0$

.) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ ، $a=\dfrac{\pi}{2}$.) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$ ، $a=1$

17 -

1) a ، b عددان حقيقيان، f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس. هل يوجد a و b بحيث المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته $y=4x+3$ ؟

2) a عدد حقيقي، g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=ax^3+3x^2+3x$

هل يوجد a بحيث الدالة g لها نهاية حدية عظمى من أجل $x=1$ ؟

18 -

a ، b عددان حقيقيان، f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^3+bx^2+2$ و (γ) تمثيلها البياني. هل يوجد a و b بحيث المماس لـ (γ) عند $A(1,2)$ يوازي محور الفواصل ؟

19 -

f دالة معرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f على I.

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α من المجال $]1\,,\,2[$

3) أعط قيمة مقربة لـ α بتقريب 10^{-2} بالزيادة.

20 -

f دالة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+3}$

1) ادرس تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني (γ) في معلم متعامد و متجانس.

2) أ) a عدد حقيقي، اكتب معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $A(a,f(a))$.

ب) هل توجد مماسات لـ (γ) تمر من المبدأ O ؟

21 -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x^2+x+7}{x+1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث (لوحدة هي 2cm).

1) أ) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) بين أن (d) المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لـ (γ)

2) احسب نهاية f عند -1 ماذا تستنتج بالنسبة إلى (γ) ؟

3) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

4) بين أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر لـ (γ).

5) ارسم المستقيمات المقاربة ثم (γ).

22 -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهاية f عند أطراف مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

2) برهن ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (γ) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (γ).

3) عين بيانيا عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية

$$x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$$

23

f دالة معرفة على $]-\infty,-4]\cup[0,+\infty[$ بـ $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

3) هل f قابلة للاشتقاق عند -4 ؟ عند 0 ؟

4) احسب $f'(x)$ من اجل كل x من $]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$ و شكل جدول تغيرات الدالة f . ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (γ).

24

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3-3x-6}{2x+4}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) برهن انه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل $x\neq-2$ يكون:

$$f(x)=a(x-1)^2+\frac{b}{x+2}$$

2) ادرس تغيرات الدالة f.

3) نسمي (Γ) المنحنى ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ و $x\neq-2$

P نقطة من (Γ) فاصلتها x و M نقطة من (γ) لها نفس الفاصلة.

أوجد المركبات السلمية للشعاع PM ثم استنتج أن لما x يؤول إلى $(+\infty)$ أو إلى $(-\infty)$ المسافة PM تؤول إلى الصفر، فسر هذه النتيجة هندسيا ثم ارسم (Γ) و (γ).

25

1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=-2x^3-6x^2-1$

ادرس تغيرات g ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]-2,+\infty[$

2) لتكن f دالة معرفة على $]-2,+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x+2}$

أ) بين ان $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة على $]-2,+\infty[$

ب) عين اتجاه تغير f على $]-2,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ) ارسم (γ) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد و متجانس.

26

1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x^3-3x-4$

أ) ادرس تغيرات g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) بين ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ثم اعط قيمة مقربة له بتقريب 10^{-2} بالزيادة. و استنتج إشارة $g(x)$

2) f دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

أ) بين أن $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$

ب) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها ثم اعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$.

جـ) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (d).

د) ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f).

27

1) g دالة معرفة كما يلي $g(0)=0$ و من اجل كل $x\neq0$ ، $g(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

أ) بين أن g قابلة للاشتقاق عند 0 .

ب) (γ) المنحنى البياني لـ g في معلم متعامد و متجانس.

تحقق أن محور الفواصل مماس لـ (γ) عند النقطة O.

2) أ) برهن أن $g\left(\frac{1}{k\pi}\right)=0$ من اجل كل عدد صحيح k.

ب) α عدد حقيقي موجب تماما، و صغير بالقدر الكافي.

يوجد عدد غير منته من الأعداد $\frac{1}{k\pi}$ مع k عدد طبيعي من المجال $]0,\alpha]$ لماذا ؟

3) هل صحيح أن المماس لـ (γ) عند A لا يقطع (γ) في نقطة أخرى مختلفة عن A بجوار A ؟

28

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ بـ $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند -1.

جـ) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ا) بين ان (d_1) و (d_2) حيث $y=-x-1$ ، (d_1) و $y=x+1$ ، (d_2) مقاربان لـ (γ).
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى كل من (d_1) و (d_2)
جـ) اوجد معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى هذا المماس على المجال $]-1,1[$.
د) ارسم المستقيمات المقاربة و المماس و (γ).

29

f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x-1}}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس
1) ا) اعط مجموعة تعريف f .
ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=-1$ من اليسار ماذا تستنتج ؟
جـ) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f عند $x_1=0$.
2) بين ان لـ (γ) مستقيمين مقاربين مائلين بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ يطلب تعيينهما.
3) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) و المستقيمات المقاربة.

30

لتكن f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x)=\dfrac{x^2+x+3\alpha+1}{x+\alpha}$ مع α عدد حقيقي ، (γ_α) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس .
1) ادرس حسب قيم α تغيرات الدالة f_α .
2) بين ان المستقيم (d_α) ذا المعادلة $y=x+1-\alpha$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α) بالنسبة إلى (d_α)
3) اثبت ان جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4) نضع $\alpha=2$ ارسم (γ_2).
5) بين ان النقطة $I(-2,-3)$ مركز تناظر لـ (γ_2).
6) ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $x^2+(1-m)x+7-2m=0$
7) استنتج من السؤال 6) عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ :
$\sin^2\theta+(1-m)\sin\theta+7-2m=0$
8) لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ $g(x)=\dfrac{x^2-|x|+7}{|x|-2}$.
عين مجموعة تعريف g ثم بين ان g زوجية. و استنتج رسم (γ') بيان g .

31

f_1 و f_2 دالتان معرفتان بـ $f_1(x)=2x+\sqrt{4x^2-4}$ و $f_2(x)=2x-\sqrt{4x^2-4}$

و (γ_1) و (γ_2) منحناهما البيانيان في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ على الترتيب.
1) ادرس استمرار و قابلية اشتقاق f_1 على D_{f_1}
2) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\dfrac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1}\dfrac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}$ ماذا تستنتج ؟
3) ادرس تغيرات الدالة f_1 .
4) بين أن لـ (γ_1) مستقيما مقاربا مائلا (d_1) معادلته $y=4x$ بجوار $(-\infty)$ ثم ارسم (d_1) و (γ_1).
5) بين أن f_1 تقابل من $]1,+\infty]$ في $]2,+\infty[$ ثم عين عبارة $f_1^{-1}(x)$ و ارسم (γ_1') بيانها في نفس المعلم السابق دون دراسة تغيراتها.
6) ا) ليكن S_O التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O عين عبارة S_O
ب) اثبت ان $S_O(\gamma_1)=(\gamma_2)$ ثم ارسم (γ_2).
7) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي إحداثياتها تحقق المعادلة $y^2-4xy+4=0$
ا) بين ان $(\Gamma)=(\gamma_1)\cup(\gamma_2)$.
ب) ليكن الشعاع $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ ، اكتب معادلة (Γ) في المعلم $\left(o,\vec{i},\vec{v}\right)$.

32

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-\sin x$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (وحدة الطول هي 3cm).
1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات f على $\mathbb{R}$.
2) برهن انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $2x-1\le f(x)\le 2x+1$ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$
3) نرمز بـ (d_1) و (d_2) الى المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $y=2x-1$ و $y=2x+1$ عين نقط تقاطع (γ) مع (d_1) و (d_2) ثم حدد المماسات لـ (γ) عند هذه النقط.
4) ادرس شفعية f ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة الى (γ) .
5) قارن بين $f(x+2\pi)$ و $f(x)$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى (γ) ؟
6) ارسم بدقة المنحني (γ) على المجال $[0,\pi]$ ثم ارسم المماسات عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و π ثم (d_1) و (d_2) و استنتج رسم (γ) على المجال $[-3\pi,3\pi]$.

33

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2+1$ إذا كان $x\langle 0$
و $f(x)=x^2+x-\sin x+1$ إذا كان $x\ge 0$

1) بين ان f مستمرة عند 0 . هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2) نفرض في هذا السؤال ان $x \in [0,+\infty[$.

ا) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f' على $[0,+\infty[$.

ب) احسب $f'(0)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $[0,+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $[0,+\infty[$.

34

1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $g(0)=0$ و $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

ا) باستعمال طريقة اولر بخطوة $0{,}5$ اعط قيمة مقربة لـ $g(0{,}5)$ و $g(1)$

ب) باستعمال طريقة اولر بخطوة $0{,}2$ ارسم (γ) المنحنى البياني المقرب لـ g على $[0,1]$.

جـ) طبق الطريقة السابقة بخطوة $0{,}1$ ثم بخطوة $0{,}01$ و باستعمال الآلة الحاسبة البيانية او المجدول ارسم منحنا تقريبيا للدالة g .

- اعط قيمة مقربة لـ $g(1)$.

2) باستعمال اتجاه تغير الدالتين برهن انه من اجل كل x من $[0,+\infty[$ يكون $0 \le g(x) \le x$

3) لتكن f دالة الظل $(\tan)$

ا) برهن انه من اجل كل x من $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ يكون $g'(f(x))=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

ب) استنتج مشتق الدالة gof ثم احسب $gof(0)$

جـ) استنتج من الأسئلة السابقة أنه من اجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ يكون $(gof)(x)-x=0$ و استنتج أيضا القيمة المضبوطة لـ $g(1)$

35

f_n دالة عددية معرفة على $]-\infty,1]$ بـ $f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}$ مع n عدد طبيعي غير معدوم و نرمز بـ (γ_n) إلى التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

1) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند 1 ماذا تستنتج ؟

2) عين حسب قيم n نهاية f_n عند $(-\infty)$

3) ا) ادرس تغيرات f_n (ميز الحالتين n فردي و n زوجي)

ب) في كل حالة من هاتين الحالتين شكل جدول تغيرات f_n .

4) ارسم (γ_1) و (γ_2) (الوحدة هي 4cm)

5) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، عين حسب قيم x الوضع النسبي لـ (γ_n) و (γ_{n+1})

36

لتكن الدالة العددية f_α المعرفة بـ $f_\alpha(x)=\frac{\sin^2 x-\alpha^2}{\cos^2 x-\alpha^2}$ ، α وسيط حقيقي موجب ، و (γ_α) التمثيل البياني للدالة f_α

1) عين حسب قيم α مجموعة تعريف الدالة f_α .

2) إذا كان $\alpha \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ بين أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

3) ادرس تغيرات الدوال f_0 ، f_1 ، $f_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ثم ارسم (γ_0) ، (γ_1) ، $\left(\gamma_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

37

f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x)=\alpha x+2\sqrt{\alpha^2x^2-1}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ، (γ_α) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أوجد مجموعة تعريف الدالة f_α ثم ضعها على شكل مجالات.

2) هل المنحني (γ_α) له مستقيمات مقاربة مائلة ؟

3) ا) ادرس قابلية اشتقاق f_α عند $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\alpha}$ ماذا تستنتج ؟

ب) نضع $\alpha=\frac{1}{3}$ ، ارسم $\left(\gamma_{\frac{1}{3}}\right)$

جـ) برهن أن $f_{\frac{1}{3}}$ تقبل دالة عكسية $f_{\frac{1}{3}}^{-1}$ يطلب رسم تمثيلها البياني في نفس المعلم.

4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x)=\frac{-1}{3}x-2\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$

اثبت ان (C_g) و $\left(\gamma_{\frac{1}{3}}\right)$ متناظران بالنسبة إلى (xx') ثم ارسم (C_g) .

38

f دالة معرفة بـ $f(x)=|x-1|+\frac{2}{x+1}$ و (γ) منحناها البياني.

1) ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق f عند $x=1$

2) بين أن (d_1) : $y=x-1$ ، (d_2) : $y=-x+1$ مستقيمان مقاربان لـ (γ) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ على الترتيب.

3) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها. و ارسم (γ) و (d_1) و (d_2)

4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x)=|x|-1+\frac{2}{1+|x|}$

عين مجموعة تعريف الدالة g ثم بين ان g زوجية و ارسم (γ') بيان g استنتاجا.

39 -

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=\frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 2cm).

1) أ) عين مجموعة تعريف f .

ب) برهن أن المنحني (γ) يقبل المستقيم (d) ذا المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ كمحور تناظر له.

جـ) اثبت أن f دورية و دورها 2π .

د) اشرح لماذا يمكن اقتصار دراسة f على $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$$f'(x)=\cos x\left[\frac{3}{(2+\sin x)^2}-1\right]$$

ب) برهن أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ثم احسب $f(\alpha)$.

جـ) شكل جدول تغيرات f على المجال $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

د) احسب $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ثم اعط قيمة تقريبية لـ α .

3) أ) ارسم (γ) على المجال $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

ب) ارسم (γ_1) حيث (γ_1) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ من (γ) و $\frac{\pi}{2}\geq x\geq 0$ في معلم متعامد و متجانس (طول الوحدة 10cm).

4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x)=f(x)-x$

أ) برهن انه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $g(x_0)=0$

ب) حدد بيانيا حل x_0 انطلاقا من (γ_1)

جـ) تحقق ان x_0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ على $\mathbb{R}$.

5) لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ $U_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$ و لتكن النقطتان $A_n(U_n, U_{n+1})$ ، $B_n(U_{n+1}, U_{n+1})$

أ) على أي منحني تجد النقطتين A_n و B_n ؟

ب) انشئ النقط A_0 ؛ B_0 ، A_1 ، B_1 ؛ A_2 ، B_2 في نفس المعلم و ذلك باستعمال السؤال (أ) و بدون حساب تراتيب هذه النقط ما عدا النقطة A_0 .

جـ) مثل الأعداد الحقيقية U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على المحور $\left(o,\vec{i}\right)$.

د) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

هـ) برهن أن من أجل كل x من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ يكون $|f'(x)|\leq\frac{2}{3}$ ثم بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون $|U_{n+1}-x_0|\leq\frac{2}{3}|U_n-x_0|$

و) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $|U_n-x_0|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-x_0|$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المتتالية (U_n) ؟

40

في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر الدائرة (C) ذات المعادلة $x^2+y^2=1$ و النقطة I ذات الإحداثيي $(1,0)$ ، M و N نقطتان من (C) بحيث $(MN)\perp(OI)$ و H نقطة تقاطع المستقيمان (OI) و (MN) ، نضع $\vec{OH}=x\vec{i}$.

1) احسب مساحة المثلث MNI بدلالة x .

2) f الدالة المعرفة على $[-1,1]$ بـ $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$

أ) أوجد قيم f عند أطراف مجال التعريف.

ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند -1 و 1 ثم استنتج معادلات المماسات للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند النقطتين ذواتا الفاصلتين -1 و 1.

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

د) ارسم (C_f) في معلم متعامد و متجانس (طول الوحدة 10cm)

3) من أجل اي قيمة لـ x مساحة المثلث MNI أعظمية ؟ ما هي هذه المساحة ؟

4) من أجل اي قيمة لـ x مختلفة عند الصفر تكون مساحة المثلث MNI تساوي 1 (يعطى x بتقريب 0,01 بالزيادة) .

41

لتكن (C) نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها r ، $KHMN$ مستطيل مرسوم داخل نصف الدائرة كما هو موضح في الشكل.

1) عين قيمة x بحيث المستطيل له مساحة أعظمية ، ما هي عندئذ قيمة y ؟

2) نسمي الآن θ قيس الزاوية $A\hat{O}M$

- عبر بدلالة θ عن مساحة المستطيل $KHMN$